UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2007
EEL-760 – Controle Linear II
Projeto Prático #1 – 02 de Abril de 2007
Data da Entrega: 04 de Maio de 2007

O objetivo deste projeto é projetar e simular, no MATLAB, sistemas de controle linear por realimentação de estados para uma planta com três pólos na origem (e portanto instável). A planta é representada no espaço de estados na forma canônica controlável:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = 0.$$

1. **Realimentação direta dos estados (sem estimador):**

   a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ da realimentação de estados que coloca os pólos em malha fechada nas posições $s_1 = -1 + j$, $s_2 = -1 - j$ e $s_3 = -4$.

   b) A partir das equações de estado:

   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK})\mathbf{x} + \mathbf{G}\bar{N}r \\ y = \mathbf{Hx} \end{cases}$$

   assumindo $\bar{N} = 1$, calcule a função de transferência em malha fechada $Y(s)/R(s)$, e daí obtenha $\bar{N}$ tal que $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} r(t)$. Usando este valor de $\bar{N}$, plote a resposta do sistema em malha fechada ao degrau.

2. **Estimador de estados de ordem completa:**

   a) Calcule o vetor $\mathbf{L}$ da realimentação da saída, de forma que os pólos do erro de estimação fiquem nas posições $s_{e1} = -4 + j$, $s_{e2} = -4 - j$ e $s_{e3} = -4$.

   b) (Estimador com $\mathbf{M} = 0$) A partir das equações de estado:

   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r) \\ \mathbf{y} = \mathbf{Hx} \\ \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{LH}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \end{cases}$$

   calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$ assumindo $\bar{N} = 1$ e daí obtenha $\bar{N}$ para que o ganho seja unitário. Calcule também os pólos e zeros do sistema em malha fechada e plote a sua resposta ao degrau.

   c) (Estimador autônomo) A partir das equações de estado:

   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r) \\ y = \mathbf{Hx} \\ \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r) - \mathbf{LH}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \end{cases}$$

   faça o mesmo que no item anterior (calcule $Y(s)/R(s)$, $\bar{N}$, pólos, zeros e plote a resposta ao degrau).

   d) (Perturbação na entrada da planta) Uma perturbação na entrada da planta pode ser representada pelas seguintes equações de estado:

   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r) + \mathbf{G}_1 w \\ y = \mathbf{Hx} \\ \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r) - \mathbf{LH}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \end{cases}$$

   Usando o fator de ganho calculado no item anterior e assumindo $\mathbf{G}_1 = [1\ 0\ 0]^T$, plote a saída $y(t)$ obtida quando são aplicadas ao sistema as seguintes entradas:

$$
\begin{array}{ll}
r(t) = u(t-50) & \text{(Entrada de referência)} \\
w(t) = 0.5[u(t-20) - u(t-30) + u(t-70) - u(t-80)] & \text{(Perturbação)}
\end{array}
$$

Nota: nas equações acima, $u(t)$ é o degrau unitário.

Depois, substitua a matriz $\mathbf{F}$ *da planta* (somente para a planta: não modifique a matriz $\mathbf{F}$ do estimador) por uma matriz $\mathbf{F} + \mathbf{E}$ em que os coeficientes foram perturbados aleatoriamente. Isso representa o caso em que o nosso modelo do sistema não corresponde exatamente ao sistema físico real.

Nota: como sugestão, um exemplo de perturbação aleatória seria a matriz:

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0.0433 & 0.0288 & 0.1189 \\ -0.1666 & -0.1146 & -0.0038 \\ 0.0125 & 0.1191 & 0.0327 \end{bmatrix}
$$

ela foi gerada no MATLAB através dos comandos: `randn('state',0);` e `E = 0.1*randn(size(F));`. Você pode usar qualquer outra matriz $\mathbf{E}$.

e) (Controle integral) Calcule um vetor de ganhos para realimentação de estados, $\mathbf{K} = [K_i \;\; \mathbf{K}_0]$ que posicione os pólos do sistema (incluindo o controle integral) em $s_1 = -1 - j$, $s_2 = -1 + j$, $s_3 = -4 + j$, $s_4 = -4 - j$. A partir das equações de estado:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i = y - r \\
\\
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}_0\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{G}K_i x_i + \mathbf{G}_1 w \\
y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\
\\
\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}_0\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{G}K_i x_i - \mathbf{L}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y
\end{cases}
$$

plote a saída $y(t)$ para $r(t)$ e $w(t)$ dados no item anterior. Depois, substitua a matriz $\mathbf{F}$ da planta pela matriz $\mathbf{F}$ perturbada por erros aleatórios, e plote $y(t)$ novamente.

f) (Projeto LQR) Recalcule o vetor $\mathbf{K}$ do item anterior, usando o comando `lqr` do MATLAB e os seguintes valores para $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ e ρ:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R} = 1 \\
&\mathbf{Q} = \text{diag}(3, 0, 0, 1) \\
&\rho = 100
\end{aligned}
$$

compare o vetor $\mathbf{K}$ com o que foi calculado no item 1e. Usando o novo vetor $\mathbf{K}$, plote $y(t)$ para as entradas $r(t)$ e $w(t)$ do item 1e, e depois também usando a matriz com erros $\mathbf{F} + \mathbf{E}$.

3. **Estimador de estados de ordem reduzida:**

a) Projete um estimador de estados de ordem reduzida $\mathbf{L}$, de forma que os pólos do erro de estimação sejam $s_{e1} = -4 - j$ e $s_{e2} = -4 + j$.

b) (Estimador com $\mathbf{M} = 0$) A partir das equações de estado:

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}J_r y + \mathbf{G}\bar{N}r \\
y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\
\\
\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y
\end{cases}
$$

calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$ assumindo $\bar{N} = 1$ e daí obtenha $\bar{N}$ para que o ganho seja unitário. Calcule também os pólos e zeros do sistema em malha fechada e plote a sua resposta ao degrau.

Nota: no cálculo de $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{G}_r$, $\mathbf{H}_r$ e J_r, leve em conta a transformação linear $\mathbf{T}$ usada para colocar $\mathbf{H}$ no formato [1 0 0].

c) (Estimador autônomo) A partir das equações de estado:

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}J_r y + \mathbf{G}\bar{N}r \\
y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\
\\
\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y + \mathbf{G}_b\bar{N}r
\end{cases}
$$

faça o mesmo que no item anterior (calcule $Y(s)/R(s)$, $\bar{N}$, pólos, zeros e plote a resposta ao degrau).

d) (Perturbação na entrada da planta) Repita o que foi feito no item 1d, para as equações de estado a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}J_r y + \mathbf{G}\bar{N}r + \mathbf{G}_1 w \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\ \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y + \mathbf{G}_b\bar{N}r \end{cases}$$

e) (Controle integral) Repita as simulações do item 1e, usando o vetor $\mathbf{K}$ que foi calculado lá, e as seguintes equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y - r \\ \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{G}K_i x_i + \mathbf{G}\mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}J_r y + \mathbf{G}\bar{N}r + \mathbf{G}_1 w \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\ \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y - \mathbf{G}_b K_i x_i \end{cases}$$

Nota: as matrizes $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{G}_r$, $\mathbf{H}_r$ e J_r devem ser recalculadas, usando os novos valores do vetor $\mathbf{K}$ (do controle integral).

f) (Projeto LQR) Refaça as simulações do item 1f, usando as equações de estado do item 2e (acima).

4. **Conclusões:**

a) Compare as respostas ao degrau dos itens 1b, 2b, 2c. Faça o mesmo para as respostas ao degrau nos itens 1b, 3b e 3c.

b) Compare o efeito das perturbações nos itens 2d e 2e. Faça o mesmo para os itens 3d e 3e.

c) Compare os vetores dos ganhos de realimentação de estados, nos itens 2e e 2f.

d) Para cada item em que são dadas equações de estados, desenhe o diagrama de blocos corresponde ao sistema em malha fechada e explique a origem das equações.

e) Comente as posições dos zeros nos itens 2b, 2c, 3b e 3c.

f) De todos os sistemas de controle estudados neste projeto, qual seria o melhor candidato para uma implementação na prática ?

5. Mais algumas dicas:

- Para simulação no MATLAB, um sistema (como por exemplo o do item 1e) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}K_i & \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{K}_0 \\ -\mathbf{G}K_i & \mathbf{L}\mathbf{H} & \mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

  As matrizes maiores são $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{G}_a$ e $\mathbf{H}_a$. O sistema pode ser simulado usando o comando `lsim` aplicado sobre essas matrizes. Também a partir dessas matrizes, pólos e zeros podem ser obtidos com `ss2tf` e `roots`. A resposta ao degrau pode ser obtida com `step`.

- Tudo pode ser feito no MATLAB básico (linhas de comando). Simulações no SIMULINK não são necessárias, portanto, e são consideradas opcionais.