UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2009
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 27 de novembro de 2009

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.625 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema linear contínuo descrito pela função de transferência a seguir:

$$D(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

   a) Calcule a resposta de $D(s)$, no domínio do tempo, ao degrau unitário.
   b) Calcule aproximações discretas para $D(z)$, utilizando o método de equivalência na resposta ao degrau e o método de integração trapezoidal.
   c) Calcule a resposta ao degrau unitário, no domínio do tempo, obtida com a aproximação por equivalência na resposta ao degrau.
   d) Calcule a resposta ao degrau unitário, no domínio do tempo, obtida com a aproximação bilinear.

2. Considere uma planta contínua descrita pela função de transferência $G(s) = 1/s^2$:

   a) Calcule um modelo discreto equivalente para esta planta, utilizando o método de discretização no espaço de estados.
   b) Considere números complexos conjugados s_1 e s_1^* de modo que $\alpha_c(z) = (z - e^{s_1 T})(z - e^{s_1^* T})$. Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para realimentação dos estados da planta do item (a), de forma que os pólos do sistema em malha fechada sejam dados pelas raízes de $\alpha_c(z)$.
   c) Projete um estimador de predição (isto é, calcule $\mathbf{L}_p$) de forma que, em malha fechada, o erro de estimação $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ tenha pólos definidos pelas raízes de $\alpha_e(z) = (z - e^{s_2 T})(z - e^{s_2^* T})$.
   d) Assumindo $s_1 = -10 + 10j$, $s_2 = -40 + 40j$, $T = 0.01$, e considerando uma análise aproximada da posição dos pólos dominantes em malha fechada, em quantas amostras a resposta ao degrau do sistema em malha fechada deveria atingir o seu valor máximo? Use a relação $t_p = \pi/\omega_d$.

3. Uma planta discretizada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Projete um estimador de estados atualizado para esta planta, de forma que os pólos do erro de estimação estejam ambos em $z = 0$.
   b) Considerando $\mathbf{K} = [2\ 1]$, escreva as equações de estado que descrevem o compensador digital (baseado no estimador de estados do item (a)) e calcule a sua função de transferência $D(z)$.
   c) Qual é a função de transferência obtida em malha fechada para esta planta, utilizando este compensador e $\bar{N} = 1$?.
   d) Calcule $\bar{N}$ para que o ganho DC do sistema do item (c) seja igual a 1.0.

4. Considere uma planta discreta com função de transferência dada por:

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

a) Desenhe o diagrama de blocos que define um sistema de controle integral para esta planta.

b) Calcule os ganhos de realimentação k_i, k_1 e k_2 para que os três pólos do sistema em malha fechada fiquem em $z = 0$.

c) Calcule $\lim_{z\to 1} \dfrac{Y(z)}{R(z)}$, onde $R(z)$ é a entrada e $Y(z)$ é a saída no diagrama de blocos do item (a).

d) Calcule $\lim_{z\to 1} \dfrac{Y(z)}{W(z)}$, onde $W(z)$ é uma perturbação aplicada à entrada da planta e $Y(z)$ é a saída, no diagrama de blocos do item (a).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{L}\mathbf{H}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$