UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2009
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 19 de junho de 2009

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Calcule as aproximações discretas para o sistema contínuo $D(s) = (s+3)/s^2$, usando cada um dos métodos a seguir:

   a) Integração numérica bilinear.
   b) Equivalência na resposta ao degrau.
   c) Discretização no espaço de estados.
   d) Escreva uma implementação do compensador discreto $D(z)$ do item (c), utilizando pseudo-código.

   Observações:

   - Note que nos itens (b) e (c) os resultados devem ser iguais.
   - A seguintes transformadas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Z}$ são úteis para o item (b):

   $$1/s^2 \longleftrightarrow tu(t) \qquad\qquad 1/s^3 \longleftrightarrow (t^2/2)u(t)$$

   $$z/(z-1)^2 \longleftrightarrow ku(k) \qquad\qquad z(z+1)/(z-1)^3 \longleftrightarrow k^2u(k)$$

2. Considere um sistema de controle descrito pela matriz e vetores a seguir. O vetor $\mathbf{L}$ corresponde a um estimador de predição:

   $$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.
   b) Calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, $Y(z)/R(z)$.
   c) Calcule a posição dos pólos de $Y(z)/R(z)$ e comente os resultados obtidos, em relação a $\alpha_c(z)$ e $\alpha_e(z)$. Que tipo de controle é este ?
   d) Quais são os zeros de $Y(z)/R(z)$?

3. Uma planta discretizada tem a seguinte representação no espaço de estados:

   $$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   $$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Projete um estimador de estados de ordem reduzida para esta planta, de forma que o pólo do erro de estimação esteja em $z = 0.1$.
   b) Considerando $\mathbf{K} = [1.0\ 1.5]$, escreva as equações de estado que descrevem o compensador digital (baseado no estimador de estados do item (a)).

c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador digital.

d) Calcule $Y(z)/R(z)$ (a função de transferência do sistema em malha fechada).

4. Para uma planta discreta, dada por:

$$G(z) = \frac{3z^2 - 4.8z + 1.91}{z^3 - 2.4z^2 + 1.91 - 0.504}$$

for projetado um compensador $D(z)$, representado pelas equações:

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = \begin{bmatrix} 464.5 & -404.6 \\ -297.7 & 260.5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_b(k) + \begin{bmatrix} -24.9 \\ 15.6 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} -49 \\ 32 \end{bmatrix} y(k+1)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} 3.1 & -2.8 \end{bmatrix} - 0.4y(k)$$

a) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.

b) Calcule a função de transferência do sistema realimentado, $Y(z)/R(z)$.

c) Efetue o produto $\alpha_c(z)\alpha_e(z) = (z-0.5)^3(z-0.1)^2$, escrevendo-o em potências decrescentes de z.

d) Relacione o resultado do item (b) ao resultado do item (c).

5. Considere um sistema digital de controle integral descrito pelas equações a seguir:

$$E(z) = Y(z) - R(z)$$

$$U(z) = \frac{-k_i}{z-1}E(z) - k_0 Y(z) + W(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z-a}U(z)$$

a) A partir destas equações, desenhe um diagrama de blocos que descreva este sistema de controle integral.

b) Calcule a função de transferência deste sistema em malha fechada (ou seja, $Y(z)/R(z)$).

c) Observando o denominador de $Y(z)/R(z)$, calcule os valores de k_i e k_0 que fazem com que o sistema em malha fechada tenha dinâmica *dead-beat*.

d) Usando k_i e k_0 do item (c), calcule a resposta $y(k)$ a um degrau unitário aplicado na entrada $w(k)$ (considere $r(k) = 0$).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{H x}(k) + J u(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$