UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2008
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 14 de novembro de 2008

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Calcule as respostas ao degrau unitário dos compensadores lineares contínuos ou discretos representados pelas funções de transferência a seguir. Nos itens (b), (c) e (d), diga quais foram os possíveis métodos de aproximação utilizados para o cálculo de $D(z)$.

   a) $D(s) = \dfrac{1}{s+1}$

   b) $D(z) = \dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$

   c) $D(z) = \dfrac{T}{T+2} \dfrac{z+1}{z + \dfrac{T-2}{T+2}}$

   d) $D(z) = \dfrac{T}{z+T-1}$

2. Considere as funções de transferência a seguir:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_1(z) = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} \qquad G_2(z) = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

   a) A resposta de $G(s)$ à entrada $u_1(t) = u(t-1) - u(t-2)$ é:

$$y_1(t) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2),$$

   onde $u(t)$ é o degrau unitário. Esboce $u_1(t)$, e calcule os valores de $y_1(0)$, $y_1(1)$, $y_1(2)$ e $y_1(3)$.

   b) A resposta de $G_1(z)$ à entrada $u_1(k) = \delta(k-1)$ é $y_1(k)$, onde $\delta(k)$ é a seqüência delta de Kronecker. Calcule os valores de $y_1(0)$, $y_1(1)$, $y_1(2)$ e $y_1(3)$. Compare estes valores com os calculados no item (a).

   c) A resposta de $G(s)$ à entrada $u_2(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$, onde $r(t)$ é a rampa $tu(t)$, é dada por:

$$y_2(t) = (t - 1 + e^{-t})u(t) - 2(t - 2 + e^{-(t-1)})u(t-1) + (t - 3 + e^{-(t-2)})u(t-2).$$

   Esboce $u_2(t)$, e calcule os valores de $y_2(0)$, $y_2(1)$, $y_2(2)$ e $y_2(3)$.

   d) A resposta de $G_2(z)$ à entrada $u_2(k) = \delta(k-1)$ é $y_2(k)$. Calcule os valores de $y_2(0)$, $y_2(1)$, $y_2(2)$ e $y_2(3)$. Explique como $G_2(z)$ foi obtida a partir de $G(s)$. Dica: a transformada de Laplace de $tu(t)$ é $1/s^2$ e a transformada Z de $ku(k)$ é $z/(z-1)^2$.

3. Considere uma planta discreta representada no espaço de estados por (use $T = 0.1$):

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{-2T} & 0 \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ necessário para que, no sistema em malha fechada com $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + r(k)$, os pólos fiquem em posições do plano Z que equivalem a $s_1 = (1/T)\ln(0.5)$ e $s_2 = (1/T)\ln(0.2)$.

   b) Calcule L para obter um estimador de estados *dead-beat* de ordem reduzida para esta planta.

   c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador obtido com $\mathbf{K}$ e L dos itens (a) e (b).

d) Verifique que a função de transferência do sistema em malha fechada está correta, ou seja, calcule $Y(z)/R(z)$ e mostre que o seu denominador é igual ao produto $\alpha_c(z)\alpha_e(z)$.

4. Considere uma planta discreta representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.585 & -0.468 \\ 0.078 & 0.975 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.078 \\ 0.004 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

E considere também o pseudo-código a seguir, que é executado em um sistema de controle digital para a planta dada acima. O período de amostragem é $T = 0.1$. A função de transferência em malha fechada é $H(z) = (b(z)\gamma(z))/(\alpha_c(z)\alpha_e(z))$.

/* Início da Iteração k */

Ler $y(k) \longleftarrow$ conversor A/D

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \check{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 4.927 \\ -4.150 \end{bmatrix} y(k)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} -4.656 & -33.068 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + 2.712 r(k)$$

Enviar $u(k) \longrightarrow$ conversor D/A

$$\check{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} -1.164 & 7.813 \\ 1.226 & -8.305 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k)$$

/* Fim da Iteração k */

a) Calcule $\alpha_c(z)$.
b) Calcule $\alpha_e(z)$.
c) Calcule $\gamma(z)$.
d) Estime o tempo de pico (t_p) e o tempo de estabelecimento em $\pm 1\%$ (t_s) da resposta de $H(z)$ ao degrau unitário. Lembre que, para pólos dominantes $s = -\sigma \pm j\omega_d$, temos $t_p \simeq \pi/\omega_d$ e $t_s \simeq 4.6/\sigma$.

5. Considere um sistema de controle discreto representado pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} X_i(z) = \dfrac{z+1}{z-1}(Y(z) - R(z)) \\[2ex] U(z) = -k_i X_i(z) - k_0 Y(z) \\[2ex] Y(z) = \dfrac{2}{z-1}(U(z) + W(z)) \end{cases}$$

a) Desenhe um diagrama de blocos representando estas equações, indicando claramente a planta.
b) Calcule os valores de k_i e k_0 para que o sistema tenha um pólo em $z = 0.5$ e outro em $z = 0.2$.
c) Calcule $Y(z)/R(z)$ utilizando os valores de k_i e k_0 encontrados no item (b).
d) Calcule $Y(z)/W(z)$ utilizando os valores de k_i e k_0 encontrados no item (b).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{L}\mathbf{H}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$