UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2008
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 20 de junho de 2008

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Calcule as aproximações discretas para o sistema contínuo $D(s) = (s+1)/s^2$, usando cada um dos métodos a seguir:

   a) Mapeamento de pólos e zeros.
   b) Integração numérica bilinear.
   c) Equivalência na resposta ao degrau.
   d) Discretização no espaço de estados.

   Observações:

   - Note que nos itens (c) e (d) os resultados devem ser iguais.
   - A seguintes transformadas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Z}$ são úteis para o item (c):

   $$1/s^2 \longleftrightarrow tu(t) \qquad 1/s^3 \longleftrightarrow (t^2/2)u(t)$$

   $$z/(z-1)^2 \longleftrightarrow ku(k) \qquad z(z+1)/(z-1)^3 \longleftrightarrow k^2u(k)$$

2. Uma planta discretizada é representada da seguinte forma:

   $$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   $$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Projete um estimador de estados de ordem reduzida, com pólo do erro de estimação tal que $\alpha_e(z) = z - 0.1$.
   b) Usando o vetor $\mathbf{K} = [1\ 1]$ para a realimentação de estados, escreva a equação a diferenças que define o estado $\hat{x}_b(k)$ do compensador.
   c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.
   d) Calcule $Y(z)/R(z)$ (função de transferência em malha fechada). Comente o posicionamento dos pólos e zeros do sistema em malha fechada.

3. O trecho de pseudo-código a seguir descreve a implementação de um compensador para a planta $G(z) = 1/(z^3 - 1)$, representada na FCO:

   /* Início da Iteração k */
   Enviar $u(k) \longrightarrow$ conversor D/A
   Conversor A/D $\longrightarrow$ amostrar $y(k)$
   $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}y(k)$
   $u(k+1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1)$
   /* Fim da Iteração k */

   onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Represente este compensador na forma de equações de estado.

b) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.

c) Usando $D(z)$, calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, $Y(z)/R(z)$.

d) Comente a configuração dos pólos e dos zeros em malha fechada.

4. Uma planta discreta $G(z)$ tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

a) Considere um estimador de estados atualizado, com $\mathbf{L}_a = [1\ 1]^T$. Calcule o polinômio característico associado ao erro de estimação em malha fechada, $\alpha_e(z)$.

b) Considerando um sistema de controle para esta planta, com $\mathbf{K} = [1\ 2]$, mostre que o sistema em malha fechada tem $\alpha_c(z) = z^2$.

c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador obtido com $\mathbf{L}_a$ e $\mathbf{K}$ dos itens (a) e (b).

d) Calcule $\lim_{z \longrightarrow 1} G(z)/(1 - D(z)G(z))$.

5. Considere um sistema digital de controle integral descrito pelas equações a seguir:

$$E(z) = Y(z) - R(z)$$

$$U(z) = \frac{-k_i}{z-1} E(z) - k_0 Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+1}{z+a} (U(z) + W(z))$$

a) A partir destas equações, desenhe um diagrama de blocos que descreva este sistema de controle integral.

b) Calcule a função de transferência deste sistema em malha fechada (ou seja, $Y(z)/R(z)$).
Dica: isto também pode ser feito diretamente a partir das equações acima.

c) Observando o denominador de $Y(z)/R(z)$, calcule os valores de k_i e k_0 que fazem com que o sistema em malha fechada tenha dinâmica *dead-beat*.

d) Calcule a função de transferência $Y(z)/W(z)$.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$G(s) = \dfrac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$

$\dfrac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \dfrac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$

$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\dfrac{1}{s} . \dfrac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \dfrac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

Lista de Equações - Controle Discreto

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k)$
$y(k) = \mathbf{Hx}(k) + Ju(k)$

$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z\mathbf{x}(0)$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$

$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z)$ e $|z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$