UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2007
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 26 de novembro de 2007

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema contínuo representado por $D(s) = s/(s^2+1)$. Seja $y(t)$ a resposta de $D(s)$ ao degrau unitário.

   a) Utilizando o método de aproximação *forward* Euler, calcule as quatro primeiras amostras de $y(t)$ com período de amostragem $T = 0.1$. Utilize condições iniciais nulas.

   b) Repita o item (a), utilizando o método de aproximação *backward* Euler.

   c) Repita o item (a), utilizando o método de discretização no espaço de estados.

   d) Calcule $y(t)$ a partir da transformada de Laplace inversa de $Y(s)$, e daí obtenha os valores de $y(0)$, $y(0.1)$, $y(0.2)$ e $y(0.3)$.

2. Considere dois sistemas discretos no tempo, representados pelas equações a seguir:

$$\text{Sistema 1:}\quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.219 & -0.368 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0.781 & -0.483 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$\text{Sistema 2:}\quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.955 & -0.223 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1.045 & -0.509 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

   a) Calcule $|\mathcal{O}|$ para ambos os sistemas.

   b) Calcule, para ambos os sistemas, a resposta à condição inicial $\mathbf{x}(0) = [\ 1\ 0\ ]^T$.

   c) Discretize, usando equivalência na resposta ao degrau, a planta $G(s)$ cuja resposta ao degrau é $y(t) = (2 - e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$.

   d) Após substituir $T = 0.2$ na resposta do item (c), represente a planta $G(z)$ na forma canônica observável. Repita isto para $T = 0.3$.

3. Considere uma planta discreta no tempo, com período de amostragem $T = 0.1$, descrita pela função de transferência:

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 - 1.4z + 0.98}$$

   a) Os pólos de $G(z)$ correspondem a quais posições no plano S ?

   b) Represente $G(z)$ no espaço de estados. Para $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{H}$, utilize o formato que lhe for mais conveniente.

   c) Calcule $\mathbf{K}$ de forma que, com realimentação $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, os pólos em malha fechada fiquem, no plano Z, nas posições que correspondem a $s = -8.574 \pm 7.854j$ no plano S.

   d) Calcule $\bar{N}$ para que, com entrada $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \bar{N}r(k)$, o valor de $\lim_{z\to 1} Y(z)/R(z)$ seja igual a 1.

4. Considere um sistema de controle digital, em que a planta discretizada é representada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Há um conversor D/A na entrada da planta contínua e um conversor A/D em sua saída. A entrada do conversor D/A é $u(k)+r(k)$, e a saída do conversor A/D é $y(k)$. O compensador é descrito pelos comandos que se seguem:

/* Início da Iteração k */

Ler $y(k)$ do conversor A/D

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \check{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} y(k)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.75 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k)$$

Enviar $u(k)$ ao conversor D/A

$$\check{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ -0.75 & -0.75 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k)$$

/* Fim da Iteração k */

a) Calcule a função de transferência $D(z)$.
b) Calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, $Y(z)/R(z)$.
c) Explique o cálculo do vetor $\mathbf{L}$ utilizado neste compensador, isto é, calcule as raízes do polinômio $\alpha_e(z)$.
d) Na função de transferência que foi calculada no item (b), identifique $\alpha_c(z)$, $\gamma(z)$ e o ganho DC.

5. Um sistema de controle com um estado integral é representado pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} e(k) = y(k) - r(k) + w_2(k) \\ x_i(k+1) = x_i(k) + e(k) \\ y(k+1) = 0.2y(k) + u(k) + w_1(k) \\ u(k) = -k_i x_i(k) - k_0 y(k) \end{cases}$$

a) Desenhe um diagrama de blocos representando estas equações.
b) Calcule o vetor $\mathbf{K} = [k_i \ k_0]$ de forma que a função de transferência $Y(z)/R(z)$ tenha todos os pólos na origem do plano Z.
c) Calcule $Y(z)/W_1(z)$.
d) Calcule $Y(z)/W_2(z)$.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$
$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$

$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$

$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z)$ e $|z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$