UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2007
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 22 de Junho de 2007

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

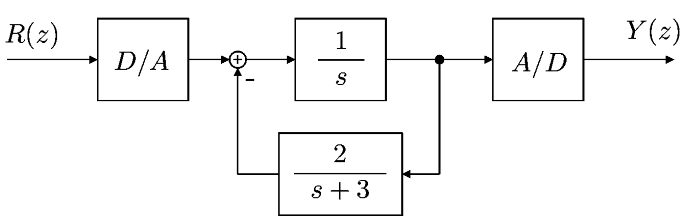
1. Considere um compensador contínuo $D(s)$, descrito pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

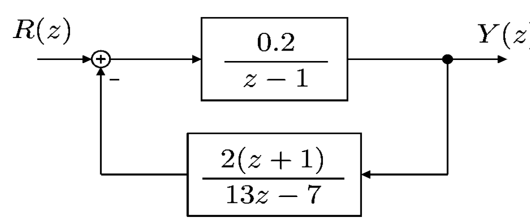
$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t)$$

   a) Calcule uma aproximação $D(z)$ para o compensador $D(s)$, utilizando o método do mapeamento de pólos e zeros. Use $T = 0.05$ seg.
   b) Calcule a resposta do sistema do item (a) ao degrau unitário.
   c) Calcule uma aproximação $D(z)$ para o compensador $D(s)$, utilizando o método da discretização no espaço de estados. Use $T = 0.05$ seg.
   d) Calcule a resposta do sistema do item (c) ao degrau unitário.

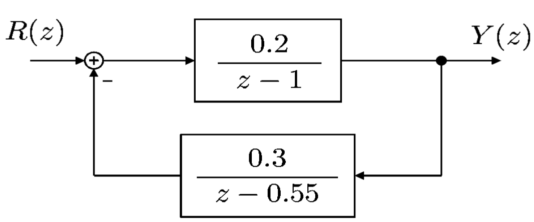
2. Considere os diagramas de blocos a seguir:



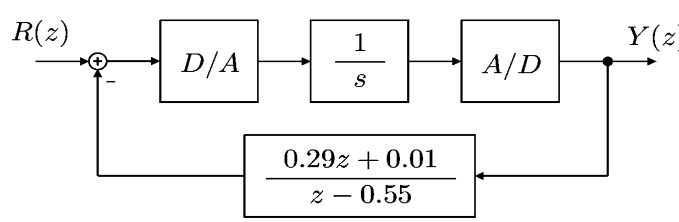
(a)



(b)



(c)



(d)

   a) Calcule a resposta ao degrau do sistema representado na Figura (a).
   b) Calcule a função de transferência do sistema representado na Figura (b).
   c) Calcule a função de transferência do sistema representado na Figura (c).
   d) Assumindo $T = 0.2$ seg., calcule a função de transferência do sistema representado na Figura (d).

3. Considere uma planta discreta $G(z)$, representada pelas equações de estado a seguir:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para que o sistema realimentado tenha $\alpha_c(z) = (z - 0.5)^3$.

b) Encontre uma transformação linear $\mathbf{T}$ que, aplicada ao vetor $\mathbf{x}$, coloca o vetor $\mathbf{H}$ em um formato que facilita o projeto de um estimador de estados de ordem reduzida.

c) Calcule o vetor $\mathbf{L}$ para o estimador de estados de ordem reduzida, de forma que os dois pólos do erro de estimação fiquem em 0.1.

d) Escreva as equações de estado que descrevem o compensador discreto (obtido a partir de $\mathbf{K}$ do item (a) e $\mathbf{L}$ do item (c)).

4. Considere uma planta discreta $G(z)$, representada pelas equações de estado a seguir:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.40 & 1 \\ -0.04 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

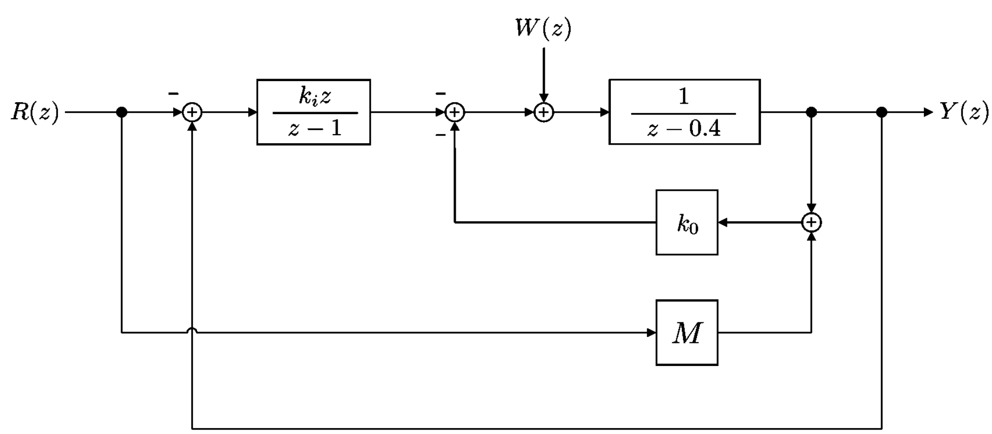
a) Projete um estimador de estados atualizado (ou seja, calcule $\mathbf{L}$) de forma tal que os dois pólos do erro de estimação fiquem em 0.1.

b) Usando $\mathbf{K} = [0.05 \ 0.20]$, escreva as equações de estado que descrevem um compensador baseado no estimador de estados do item (a).

c) Escreva uma implementação do compensador, utilizando pseudo-código.

d) Calcule a função de transferência do sistema em malha fechada.

5. Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos a seguir:



a) Calcule k_i e k_0 para que a função de transferência do sistema tenha dois pólos na origem.

b) Calcule M para que a função de transferência $Y(z)/R(z)$ tenha um zero em $z = 0.5$.

c) Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ (considerando k_i, k_0 e M dos itens anteriores).

d) Calcule a função de transferência $Y(z)/W(z)$ (considerando k_i, k_0 e M dos itens anteriores).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{Hx}(k) + Ju(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathrm{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(\mathbf{F})$$

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F}) \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

Lista de Símbolos

$$\frac{1}{s}$$

$$\frac{2}{s+3}$$

A/D

D/A

$$\frac{0.2}{z-1}$$

$$\frac{0.29z+0.01}{z-0.55}$$

$$\frac{2(z+1)}{13z-7}$$

$R(z)$

$Y(z)$

$$\frac{0.3}{z-0.55}$$

$R(z)$ $Y(z)$ $W(z)$ M

k_0

$$\frac{k_i z}{z-1}$$

$$\frac{1}{z-0.4}$$