UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2006
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – Modelo A – 01 de Dezembro de 2006

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere o compensador contínuo $D(s) = s/(s+1)$.

   a) Usando o método de aproximação bilinear, calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador discreto que aproxima $D(s)$.

   b) Repita o item (a), usando o método da equivalência na resposta ao degrau.

   c) Substituindo $T = 1$ nos itens (a) e (b), compare as respostas ao degrau obtidas por cada compensador.

   d) Repita o item (c), usando $T = 0.1$. Comente os resultados.

2. Considere uma planta contínua, representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

   a) Usando o método de discretização no espaço de estados, calcule $\mathbf{\Phi}$ correspondente a esta matriz $\mathbf{F}$.

   b) Calcule $\mathbf{\Gamma}$.

   c) Calcule a matriz de observabilidade da planta contínua, $\mathcal{O}_c$, e a matriz de observabilidade da planta discretizada, $\mathcal{O}_d$.

   d) Mostre que, se $\det(\mathcal{O}_c) \neq 0$, então a planta discretizada é também observável para qualquer $T \neq 0$.
   Dica: para facilitar as manipulações algébricas nos itens (c) e (d), substitua e^{-T} por x, e substitua e^{-2T} por x^2, sendo x uma incógnita a ser resolvida para que se possa obter T.

3. Considere uma planta discretizada, representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.80 & 1 \\ -0.81 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Projete um estimador de estados de predição com dinâmica *dead-beat* no erro de estimação.

   b) Projete um estimador de estados avançado com dinâmica *dead-beat* no erro de estimação.

   c) Considerando $\mathbf{K} = [\,0.4 \;\; 0.4\,]$, calcule a função de transferência do compensador $D(z)$ baseado no estimador avançado do item (b).

   d) Usando o compensador do item (c), calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, justificando as posições dos pólos e dos zeros em malha fechada.

4. Considere um sistema de controle descrito por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \end{bmatrix}$$

a) Assumindo um estimador de estados de ordem reduzida com $L = 0.2$, escreva a equação a diferenças que define $\hat{x}_2(k+1)$ em função de $\hat{x}_2(k)$, $y(k)$ e $y(k+1)$.

b) Escreva um trecho de pseudo-código que implemente o compensador baseado no estimador do item (a) e no vetor $\mathbf{K}$ do enunciado.

c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.

d) Calcule a função de transferência do sistema discreto em malha fechada. Justifique o posicionamento dos pólos e dos zeros em malha fechada.

5. Considere uma planta discreta definida por $G(z) = 1/(z-1)$:

a) Desenhe um diagrama de blocos que represente um sistema de controle integral aplicado a esta planta, com ganhos de realimentação dados por $\mathbf{K} = [\ k_i \quad k_0\ ]$. Neste diagrama, inclua a perturbação $w(k)$ na entrada da planta. Escreva as equações de estados correspondentes ao diagrama de blocos.

b) Assumindo que os pólos desejados são s_1 e s_2 iguais a $-3.466 \pm 7.854j$ e que o período de amostragem é $T = 0.1$, encontre o polinômio característico do sistema de controle discreto em malha fechada, $\alpha_c(z)$.

c) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ correspondente a este $\alpha_c(z)$.

d) Calcule as funções de transferência $Y(z)/W(z)$ e $Y(z)/R(z)$ que são obtidas em malha fechada, quando é usado o vetor $\mathbf{K}$ do item (c).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$
$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$

$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I}-\Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I}-\Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$

$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$
$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z)$ e $|z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$

UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2006
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – Modelo B – 01 de Dezembro de 2006

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere o compensador contínuo $D(s) = s/(s+1)$.

   a) Usando o método de aproximação *forward* Euler, calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador discreto que aproxima $D(s)$.
   b) Repita o item (a), usando o método de aproximação *backward* Euler.
   c) Repita o item (a), usando o método de mapeamento de pólos e zeros.
   d) Substitua $T = 0.1$ nos itens (a), (b) e (c), e calcule as respostas de cada uma das aproximações ao degrau unitário. Calcule novamente as respostas para $T = 0.5$. Compare os resultados.

2. Considere uma planta contínua, representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

   a) Usando o método de discretização no espaço de estados, calcule $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$ correspondentes à matriz $\mathbf{F}$ e ao vetor $\mathbf{G}$ do enunciado, assumindo T qualquer.
   b) Discuta a controlabilidade da planta discretizada.
   c) Discuta a observabilidade da planta discretizada.
   d) Discuta a estabilidade da planta discretizada.

3. Considere uma planta discretizada, representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.64 \\ -0.81 & 1.62 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   a) Projete um estimador de estados de ordem reduzida com pólo do erro de estimação em $z = -0.3$.
   b) Considerando $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}$, e usando o estimador de estados do item (a), escreva a equação a diferenças que define $\hat{x}_2(k+1)$ em função de $\hat{x}_2(k)$, $y(k)$ e $y(k+1)$.
   Observação: o vetor $\mathbf{K}$ é dado para o espaço de estados original. Se preferir, você pode escrever a equação a diferenças que define $\hat{z}_2(k+1)$ em função de $\hat{z}_2(k)$, $y(k)$ e $y(k+1)$.
   c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.
   d) Calcule a função de transferência do sistema discreto em malha fechada. Justifique as posições dos pólos e dos zeros em malha fechada.

4. Considere um sistema de controle descrito por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \end{bmatrix}$$

a) Assumindo um estimador de estados de predição com $\mathbf{L} = [\ 2 \ \ 1\ ]^T$, e usando o vetor $\mathbf{K}$ do enunciado, escreva as equações de estado do compensador.

b) Escreva um trecho de pseudo-código que implemente o compensador do item (a).

c) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador.

d) Calcule a função de transferência do sistema discreto em malha fechada. Justifique o posicionamento dos pólos e dos zeros em malha fechada.

5. Considere um sistema de controle integral descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} u(k) = -k_i x_i(k) - k_0 y(k) \text{ (controle)} \\ y(k+1) = -0.3y(k) + u(k) + u(k+1) + [w(k) + w(k+1)] \text{ (planta com perturbação } w(k)) \\ e(k) = y(k) - r(k) \text{ (erro)} \\ x_i(k+1) = x_i(k) + e(k) \text{ (acumulador)} \end{cases}$$

a) Desenhe um diagrama de blocos que represente estas equações, incluindo os ganhos de realimentação dados por $\mathbf{K} = [\ k_i \ \ k_0\ ]$. Neste diagrama, inclua a perturbação $w(k)$ na entrada da planta.

b) Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$, deixando-a em função de k_i e k_0.

c) Calcule k_i e k_0 para que os pólos de $Y(z)/R(z)$ fiquem nas posições $0.5 \pm 0.5j$.

d) Usando k_i e k_0 do item (c), calcule a função de transferência $Y(z)/W(z)$.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{L}\mathbf{H}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$