UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2006
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 19 de Junho de 2006

Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um compensador contínuo especificado pela função de transferência a seguir:

$$D(s) = \frac{2s+2}{s^2+1}$$

Calcule aproximações discretas $D(z)$ para o compensador, utilizando os métodos a seguir. Considere $T = 0.4$.

a) Mapeamento de pólos e zeros
b) Integração numérica, método bilinear.
c) Equivalência na resposta ao degrau.

2. Considere uma planta contínua representada pela função de transferência a seguir:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

a) Usando o método de discretização no espaço de estados, encontre um modelo $G(z)$ para esta planta.
b) Obtenha a representação canônica *controlável* da planta discreta $G(z)$ no espaço de estados.
c) Usando a representação na forma canônica controlável, calcule o vetor $\mathbf{K}$ para a realimentação dos estados da planta, de forma que em malha fechada o sistema tenha pólos em $-10 \pm 10j$. Considere $T = 0.2$.
d) Usando o vetor $\mathbf{K}$ do item (c), com $T = 0.2$ e $\bar{N} = 1$, calcule o ganho DC do sistema em malha fechada.

3. Considere uma planta discreta representada pela função de transferência a seguir:

$$G(z) = \frac{z+0.5}{z^2 - z + 0.5}$$

a) Represente esta planta no espaço de estados, usando a forma canônica *observável.*
b) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para realimentação dos estados da planta no item (a), de forma a colocar os pólos em malha fechada nas posições $z = 0.25 \pm 0.25j$.
c) Projete um estimador de estados de ordem reduzida (L) com pólo do erro de estimação em $z = -0.1$.
d) Encontre os coeficientes (a, b, e c) da equação a diferenças que relaciona $\hat{x}_2(k)$ com a saída $y(k)$ da planta:

$$\hat{x}_2(k+1) = a\hat{x}_2(k) + by(k) + cy(k+1)$$

Dica: substitua todos os valores conhecidos na equação do estimador de ordem reduzida, $\hat{\mathbf{x}}_b(k+1)$, que é dada no formulário. Lembre que $\hat{\mathbf{x}}_b(k) = \hat{x}_2(k)$, que $x_a(k) = y(k)$, e que $u(k) = -k_1 y(k) - k_2 \hat{x}_2(k)$.
e) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador obtido com $\mathbf{K}$ e L dos itens (b) e (c).
Dica: calcule $\hat{X}_2(z)/Y(z)$ a partir do resultado do item (d).
Dica: depois, substitua $\hat{X}_2(z)$ em $U(z) = -k_1 Y(z) - k_2 \hat{X}_2(z)$.
f) Opcional: calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ do sistema em malha fechada, usando $\bar{N} = 1$.

4. Considere uma planta discreta representada pela função de transferência a seguir:

$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

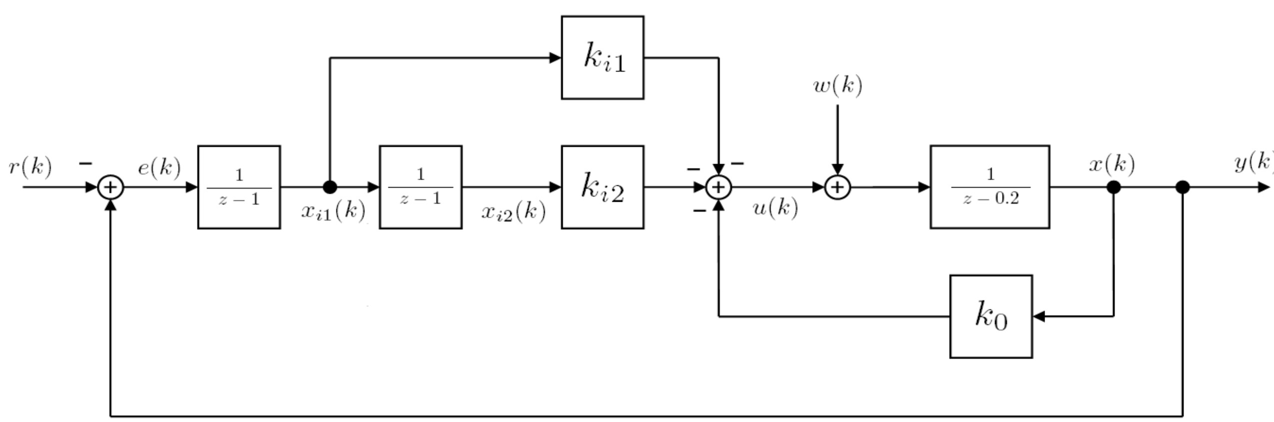
   a) Represente esta planta na FCO, e calcule o vetor $\mathbf{L}_p$ do estimador de predição com dinâmica *dead-beat*.
   b) Usando também a FCO, calcule o vetor $\mathbf{L}_a$ do estimador atualizado com dinâmica *dead-beat*.
   c) Usando $\mathbf{L}_p$ e assumindo $\mathbf{K} = [1\ 0\ 0]$, complete as lacunas **A**, **B**, e **C** do trecho de pseudo-código:

/* Início da Iteração k */
Enviar $u(k) \longrightarrow$ conversor D/A
Conversor A/D $\longrightarrow$ amostrar $y(k)$
$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}y(k)$
$u(k+1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1)$
/* Fim da Iteração k */

   d) Usando $\mathbf{L}_a$ e assumindo $\mathbf{K} = [1\ 0\ 0]$, complete as lacunas **X**, **Y**, e **Z** do trecho de pseudo-código:

/* Início da Iteração k */
Conversor A/D $\longrightarrow$ amostrar $y(k)$
$\hat{\mathbf{x}}(k) = \check{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{X}y(k)$
$u(k) = \mathbf{Y}\hat{\mathbf{x}}(k)$
Enviar $u(k) \longrightarrow$ conversor D/A
$\check{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}(k)$
/* Fim da Iteração k */

5. Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos a seguir (controle integral, com dois acumuladores):



   a) Represente este diagrama de blocos usando equações de estado.
   Dica: escreva as equações a diferenças para $x_{i1}(k)$, $x_{i2}(k)$, e $x(k)$.
   b) Calcule os ganhos da realimentação de estados, $\mathbf{K} = [k_{i1}\ k_{i2}\ k_0]$, para obter um sistema com $\alpha_c(z) = z^3$.
   c) Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$.
   Dica: somente o termo (3,1) da matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Gamma}_i\mathbf{K})^{-1}$ é necessário.
   d) Calcule a função de transferência $Y(z)/W(z)$.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{L}\mathbf{H}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$
$$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}\mathbf{H}\Phi| = \alpha_e(z) \text{ e } |z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = (\Phi_{bb} - \mathbf{L}\Phi_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b(k) + (\Phi_{ba} - \mathbf{L}\Phi_{aa})x_a(k) + (\Gamma_b - \mathbf{L}\Gamma_a)u(k) + \mathbf{L}x_a(k+1)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$