UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2005
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 21 de Novembro de 2005

Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere o compensador $D(s)$ dado por:

$$D(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

Utilizando cada um dos métodos de discretização a seguir, encontre aproximações discretas $D(z)$ para este sistema, e indique os pólos e zeros das funções $D(z)$ obtidas. Assuma $T = 0.2$.

   a) Mapeamento de pólos e de zeros.
   b) Integração numérica, método *forward* Euler.
   c) Integração numérica, método *backward* Euler.

2. Considere um sistema contínuo com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{2(s+\sigma)}{(s^2+2\sigma s+\sigma^2+\omega^2)} = \frac{2(s+\sigma)}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)}$$

onde σ e ω são números reais estritamente positivos.

   a) Através do método de discretização no espaço de estados, obtenha uma representação discreta (Φ, Γ e $\mathbf{H}$) deste sistema.
   b) Encontre uma expressão para as freqüências de amostragem $f_s = 1/T$ que, se utilizadas, resultam em um sistema discretizado que não é controlável. Qual é a $f_{s,min}$ acima da qual a controlabilidade é garantida ?
   c) Repita o item (b), com relação à observabilidade do sistema discretizado.

3. Uma planta discretizada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para a realimentação dos estados desta planta de forma a obter, em malha fechada, pólos z_1 e z_2 iguais a $0.5 \pm 0.5j$.
   b) Se $T = 0.1$, os pólos z_1 e z_2 do item (a) equivalem a quais pólos s_1 e s_2, no plano S ?
   c) Calcule o vetor $\mathbf{L}_p$ para obter um estimador de estados *de predição* com dinâmica *dead-beat*. Qual é o vetor $\mathbf{L}_a$ para um estimador de estados *atual*, também com dinâmica *dead-beat* ?

d) Usando os vetores $\mathbf{K}$ e $\mathbf{L}_a$ dos itens (a) e (c), escreva as equações de estado do compensador digital baseado em um estimador de estados *atual*.

e) Calcule a função de transferência $D(z)$ do compensador digital do item (d).

f) Calcule os pólos da função de transferência $Y(z)/R(z)$, obtida para o sistema em malha fechada.

4. Neste problema consideramos três sistemas de controle diferentes para a planta $G(s) = 1/s$. O período de amostragem é $T = 0.3$.

a) (Controle contínuo) Dado um compensador $D(s) = -(s+4)/(s+3)$, calcule a função de transferência do sistema contínuo em malha fechada, $Y(s)/R(s)$. Calcule os pólos e zeros de $Y(s)/R(s)$.

b) Utilizando o mapeamento e^{sT}, os pólos e zeros de $Y(s)/R(s)$ correspondem a quais posições no plano Z ?

c) Utilizando o método da equivalência na resposta ao degrau, encontre a planta discretizada $G(z)$ equivalente a $G(s)$. As seguintes transformadas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Z}$ são úteis:

$$1/s^2 \longleftrightarrow tu(t) \quad \text{e} \quad z/(z-1)^2 \longleftrightarrow ku(k)$$

d) (Controle discreto com compensador aproximado) Calcule uma aproximação discreta $D(z)$ para o compensador $D(s)$ do item (a), utilizando o método de integração numérica bilinear. Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ do sistema discreto em malha fechada. Calcule os pólos e zeros de $Y(z)/R(z)$.

e) (Controle discreto com compensador exato) Considere um compensador digital com função de transferência $D(z) = -(z+a)/(z+b)$. Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ do sistema discreto em malha fechada, em função de a e b.

f) Calcule $\alpha_c(z)$ a partir dos pólos calculados no item (b). Comparando os coeficientes de $\alpha_c(z)$ com o denominador de $Y(z)/R(z)$ do item (e), obtenha a e b. Indique os pólos e zeros de $Y(z)/R(z)$ do item (e).

g) Se alterássemos T para 0.5, o que aconteceria com os pólos e zeros calculados nos itens (d) e (f) ?

5. Para uma planta discreta:

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + z + 0.5}$$

a) Desenhe um diagrama de blocos a nível de atrasos (z^{-1}) que descreva um sistema de controle integral para esta planta, com ganhos K_i, K_1 e K_2, mostrando também perturbação $w(k)$ na entrada da planta.

b) Calcule os ganhos K_i, K_1 e K_2 para o sistema de controle integral de forma que, em malha fechada, ele tenha uma função de transferência com três polos sobre a origem.

Boa sorte !

Lista de Equações

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$

$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$

$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$

$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix}$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z)$ e $|z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$