UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2005
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #2 – 20 de Junho de 2005

Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema contínuo representado pela função de transferência:

$$D(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Calcule uma aproximação discreta $D(z)$ para este sistema, e também os pólos e zeros de $D(z)$, utilizando cada um dos métodos a seguir. Assuma $T = 0.1$.

   a) Integração numérica, método *backward* Euler.
   b) Integração numérica, método bilinear.
   c) Discretização no espaço de estados (a escolha da representação de $D(s)$ no espaço de estados é livre).

2. Uma planta $G(s)$ tem seus pólos em $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$ e seu zero em $s_3 = -20$. Em DC, o ganho de $G(s)$ é 1. O objetivo deste problema é projetar uma regra de controle $\mathbf{K}$ para o modelo discreto $G(z)$, de forma que os pólos do sistema contínuo em malha fechada fiquem nas posições $s_{1,2} = -10 \pm 10j$, e verificar o posicionamento correto dos pólos. O período de amostragem é $T = 0.01$.

   a) Usando um método de discretização de sua escolha, calcule matrizes Φ, Γ e $\mathbf{H}$ que representem $G(z)$ no espaço de estados.
   b) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para que a realimentação $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ coloque os pólos do sistema sobre as posições z_1, z_2 desejadas.
   c) Escreva as equações de estado do sistema discreto em malha fechada (use $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \bar{N}r(k)$, com $\bar{N} = 1$).
   d) Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ e verifique o posicionamento correto dos pólos.
   e) Calcule $\bar{N}$ para que o ganho DC do sistema discreto em malha fechada seja unitário.

3. Uma planta discretizada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Projete um estimador de predição para o estados desta planta, de forma que os pólos do erro de estimação fiquem em $-0.5 \pm 0.5j$.
   b) Projete um estimador atualizado para os estados desta planta, de forma que os pólos do erro de estimação fiquem em $-0.5 \pm 0.5j$.
   c) Assumindo $\mathbf{K} = [0\ 1]$, calcule os pólos e os zeros do compensador implementado a partir do estimador do item (b).

4. Uma planta discretizada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   a) Projete um estimador de ordem reduzida para os estados desta planta, de forma que o pólo do erro de estimação fique em -0.2.

   b) Escreva a equação a diferenças para o cálculo de $\hat{z}_2(k)$, no compensador que é implementado a partir do estimador de estados do item (a), usando $\mathbf{K} = [1 \;\; -0.5]$ (este vetor de ganhos é para o sistema de coordenadas da planta, $\mathbf{x}(k)$, e coloca os pólos do sistema em malha fechada nas posições $0.5 \pm 0.5j$).

   c) Calcule a função de transferência $D(z) = U(z)/Y(z)$ do compensador.

   d) Calcule a função de transferência $Y(z)/R(z)$ e verifique o posicionamento correto dos três pólos.

5. Uma planta discretizada é representada da seguinte forma:

$$\begin{cases} x(k+1) = 0.4x(k) + 2u(k) \\ \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

   a) Projete um sistema de controle integral ($\mathbf{K} = [K_i \; K_0]$) com dinâmica *dead-beat*.

   b) Calcule a função de transferência da entrada para a saída do sistema em malha fechada, ou seja, $Y(z)/R(z)$. Verifique que $\lim_{z\to1} Y(z)/R(z) = 1$.

   c) Uma perturbação $w(k)$ é aplicada à entrada da planta, no sistema em malha fechada. Calcule a função de transferência $Y(z)/W(z)$. Verifique que $\lim_{z\to1} Y(z)/W(z) = 0$.

Boa sorte !

Lista de Equações

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$

$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$

$Y(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma U(z) + JU(z) + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}(0)$

$s = \frac{z-1}{T}$ – integração numérica, método *forward* Euler.

$s = \frac{z-1}{Tz}$ – integração numérica, método *backward* Euler.

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ – integração numérica, método bilinear.

$\Phi = e^{\mathbf{F}T}$

$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + \mathbf{L}y(k)$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\Phi - \mathbf{LH}\Phi)\hat{\mathbf{x}}(k) + (\Gamma - \mathbf{LH}\Gamma)u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$

$|z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LH}\Phi| = \alpha_e(z)$ e $|z\mathbf{I} - \Phi + \Phi\mathbf{LH}| = \alpha_e(z)$

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

$|z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}\Phi_{ab}| = \alpha_e(z)$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}$$

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \left(+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} w(k) \right)$$