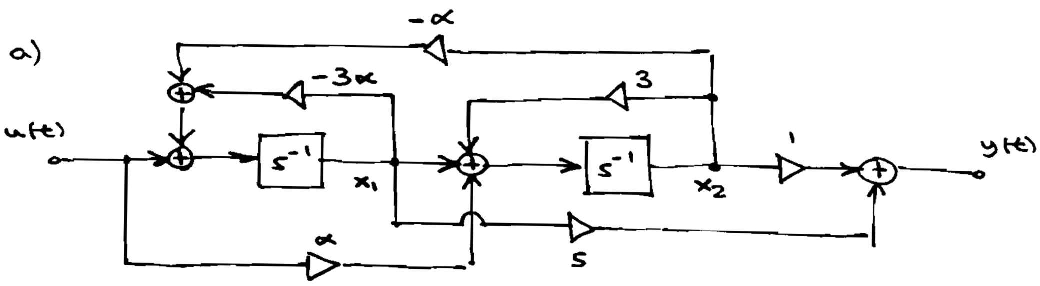
CONTROLE LINEAR II — PROVA PARCIAL #1 — 2006/1 — GABARITO

QUESTÃO 1:

a)



b) $\det \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha^2-3\alpha \\ \alpha & 1+3\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = (\alpha+1)^3 = 0$

SISTEMA NÃO CONTROLÁVEL $\iff \alpha = -1$.

c) $\det \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1-15\alpha & 3-5\alpha \end{vmatrix} = 15 - 25\alpha + 15\alpha - 1 = 14 - 10\alpha = 0$

SISTEMA NÃO OBSERVÁVEL $\iff \alpha = 1.4$

d) SE $\alpha = 1$, $F = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$|sI - F| = \begin{vmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s-3 \end{vmatrix} = s^2 - 9 + 1 = 0 \implies s^2 = 8 \implies s = \pm 2\sqrt{2}$.

O PÓLO EM $s = 2\sqrt{2}$ TORNA O SISTEMA INSTÁVEL.

QUESTÃO 2:

a) PÓLOS DOMINANTES: $s^2 + 2s + 2 = 0$

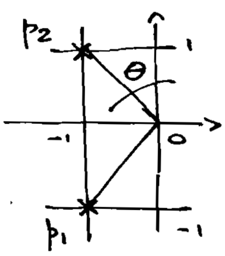
$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm j$$

$p_1 = -1-j$ E $p_2 = -1+j$

NOTE QUE $\sigma_{p_3} = 10 \implies \sigma_{p_3} > 4\sigma_{p_1}$

E QUE $\sigma_{zero} = 20 \implies \sigma_{zero} > 4\sigma_{p_1}$

ENTÃO, O PÓLO EM $p_3 = -10$ E O ZERO EM $z = -20$ PODEM SER DESPREZADOS NO CÁLCULO DE M_p E t_p.



$\theta = 45° \implies \xi = 0.7 \implies M_p = 5\%$

$\omega_d = 1 \implies t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \implies t_p = 3.14$ seg

b) PARA REDUZIR t_p À METADE (E TAMBÉM t_r E t_s), MANTENDO M_p CONSTANTE, DEVEMOS DUPLICAR σ E ω_d. ENTÃO: $\sigma = 2$ E $\omega_d = 2$.

$(s+2+2j)(s+2-2j) = s^2 + 4s + 8$

$$\alpha_c(s) = (s+10)(s^2+4s+8) = s^3 + 4s^2 + 8s + 10s^2 + 40s + 80 = s^3 + \underbrace{14}_{\alpha_1}s^2 + \underbrace{48}_{\alpha_2}s + \underbrace{80}_{\alpha_3}$$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO 2 :

c) $\left[\text{DENOMINADOR DE } G(s)\right] = (s+10)(s^2+2s+2) = s^3 + 2s^2 + 2s + 10s^2 + 20s + 20$

$$= s^3 + \underset{a_1}{12}s^2 + \underset{a_2}{22}s + \underset{a_3}{20}$$

NO FCC, O VETOR K PODE SER OBTIDO DIRETAMENTE, POR INSPEÇÃO:

$k_1 = \alpha_1 - a_1 = 2$; $k_2 = \alpha_2 - a_2 = 26$; $k_3 = \alpha_3 - a_3 = 60$

ENTÃO, $K = [\,2 \quad 26 \quad 80\,]$.

QUESTÃO 3:

a) $F - GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\,k_1 \quad k_2\,] = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} s+k_1 & k_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2 = \underbrace{(s+2+2j)(s+2-2j)}_{\alpha_c(s)} = s^2 + 4s + 8$; $k_1 = 4$, $k_2 = 8$

ENTÃO: $K = [\,4 \quad 8\,]$

b) $z = Px$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $T = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$H_z = HT = [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\,1 \quad 0\,]$ (ou)

$G_z = T^{-1}G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow G_a = 0 \\ \rightarrow G_b = 1 \end{matrix}$

$F_z = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{F_{aa}}{0} & \overset{F_{ab}}{1} \\ \hline \underset{F_{ba}}{0} & \underset{F_{bb}}{0} \end{array}\right]$

$|sI - F_{bb} + LF_{ab}| = \underbrace{s+10}_{\alpha_e(s)}$

$s + L = 10 \implies L = 10$

c) $F_r = \cancel{F_{bb}}^{0} - LF_{ab} - (G_b - L\cancel{G_a}^{0})K_b = -10 - 4 = -14$

$\underline{\text{OBS.:}}$ $u = -K\hat{x} = -KT\hat{z} = -[\,4 \quad 8\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} = -[\,\underset{K_a = 8}{8} \,|\, \underset{K_b = 4}{4}\,]\,\hat{z}$

$G_r = F_r L + \cancel{F_{ba}}^{0} - L\cancel{F_{aa}}^{0} - (G_b - LG_a)K_a = -148$

$H_r = -K_b = -4$

$J_r = -K_a - K_b L = -8 - 40 = -48$

$$\begin{cases} x_c' = -14x_c - 148y \\ u = -4x_c - 48y \end{cases}$$ ← EQUAÇÕES DE ESTADO DO COMPENSADOR

d) $D(s) = \dfrac{-4}{s+14} \cdot (-148) + (-48) = \dfrac{592 - 48s - 672}{s+14} = \dfrac{-48s - 80}{s+14} = \dfrac{-16(3s+5)}{s+14}$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO 3:

e) $G(s) = [0 \;\; 1]\begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{[0 \;\; 1]\begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2} = \dfrac{[1 \;\; s]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2} = \dfrac{1}{s^2}$

f) $H(s) = \dfrac{G(s)}{1 - D(s)G(s)} = \dfrac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{16(3s+5)}{s+14}}$

$$H(s) = \frac{s+14}{s^3 + 14s^2 + 48s + 80}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^3 + 14s^2 + 48s + 80 & s^2 + 4s + 8 \\ \cline{2-2}
\underline{s^3 + 4s^2 + 8s} & s + 10 \\
\quad 10s^2 + 40s + 80 & \\
\quad \underline{10s^2 + 40s + 80} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$\gamma(s)$: PÓLO DE $D(s)$.

ENTÃO: $H(s) = \dfrac{s+14}{\underbrace{(s^2+4s+8)}_{\alpha_c(s)}\underbrace{(s+10)}_{\alpha_e(s)}}$

$\alpha_c(s)$ E $\alpha_e(s)$ ESTÃO DE ACORDO COM OS ITENS (a) E (b).

$\gamma(s)$ ESTÁ DE ACORDO COM O ITEM (d).

g) GANHO DC: $\lim\limits_{s \to 0} H(s) = \dfrac{14}{80} = \dfrac{7}{40}$.

QUESTÃO 4:

a) PLANTA: $x' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$ $\left(\underline{\text{OBS.:}} \;\; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$

$y = [1 \;\; 0]\, x$

(É O SISTEMA $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$, REPRESENTADO NA FCO).

b) $\begin{bmatrix} x_i' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} \end{bmatrix} \omega$

$u = -[2 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix} x_i \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}[2 \;\; 0 \;\; 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

ENTÃO: $\begin{bmatrix} x_i' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \omega$

$y = [0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix}$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO 4:

c) FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE R PARA Y:

$$-[0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \boxed{2} & s+3 & \boxed{0} \\ \boxed{6} & 2 & \boxed{s+3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{+\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & s+3 \end{vmatrix}}{s\underbrace{(s+3)(s+3)}_{s^2+6s+9}+2s+6}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2(s+3)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2\cancel{(s+3)}}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

d) FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE W PARA Y:

$$+[0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} \boxed{s} & -1 & \boxed{0} \\ 2 & s+3 & 0 \\ \boxed{6} & 2 & \boxed{s+3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{+\begin{vmatrix} s & 0 \\ 6 & s+3 \end{vmatrix}}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s\cancel{(s+3)}}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}} = \frac{s}{s^2+3s+2}$$

e) $R(s) = \frac{1}{s}$; $W(s) = 0$; $Y(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

$A = \frac{2}{2} = 1 \qquad B = \frac{2}{(-1)\times 1} = -2 \qquad C = \frac{2}{(-2)\times(-1)} = 1$

ENTÃO: $y(t) = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\,u(t)$ //

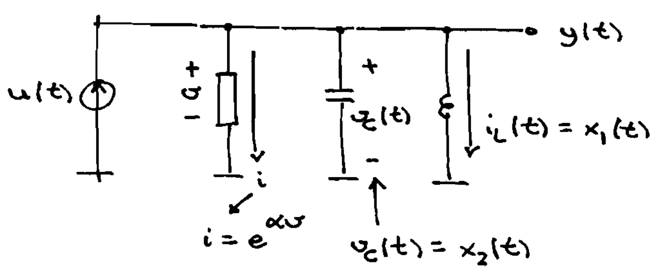
f) $W(s) = \frac{1}{s}$; $R(s) = 0$; $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$

$A = \frac{1}{1} = 1 \qquad B = \frac{1}{-1} = -1$

ENTÃO: $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$ //

QUESTÃO 5:

a)



KVL: A TENSÃO SOBRE O CAPACITOR É IGUAL À TENSÃO SOBRE O INDUTOR $\longrightarrow$ $Lx_1' = x_2$.

KCL: A CORRENTE SOBRE O CAPACITOR É IGUAL À DA FONTE $u(t)$, MENOS AS CORRENTES DO DISPOSITIVO NÃO-LINEAR E DO INDUTOR.

$\hookrightarrow Cx_2' = u - x_1 - e^{\alpha x_2}$.

b) EQUILÍBRIO:

$Lx_1' = x_2 = 0 \longrightarrow x_{20} = 0\,V$.

$Cx_2' = -x_1 - e^{\alpha x_2} + u = 0 \longrightarrow -x_{10} - e^{\alpha x_{20}} + 3 = 0 \longrightarrow x_{10} = 2A$.

ENTÃO, $u_0 = 3A \longrightarrow (x_{10}, x_{20}) = (2A, 0V)$.

c) LINEARIZAÇÃO: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{1}{L} \qquad \left(f_1(x_1, x_2, u) = \frac{x_2}{L}\right)$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-1}{C} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{\alpha}{C}e^{-\alpha \cancel{x_{20}}^{\,0}} = -\frac{\alpha}{C} \qquad \left(f_2(x_1, x_2, u) = -x_1 - e^{\alpha x_2} + u\right)$.

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO 5:

$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$, ENTÃO $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -\alpha/C \end{bmatrix}$, $H = [0 \quad 1]$.

$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{C}$

d) $$|sI - F| = \begin{vmatrix} s & -1/L \\ 1/C & s + \alpha/C \end{vmatrix} = s^2 + \frac{\alpha}{C} s + \frac{1}{LC} = s^2 + 2s + 1 = 0$$

$\alpha = 2\,V^{-1}$
$L = 1\,H$
$C = 1\,F$

↳ PÓLO DUPLO EM $s = -1$. (SISTEMA ESTÁVEL).