UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2009
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 02 de outubro de 2009

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema linear descrito pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Calcule uma transformação linear $\mathbf{T}$ que, aplicada ao vetor $\mathbf{x}$ através da equação $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, leva à representação do sistema na forma canônica controlável.
   b) Considere $\mathbf{K}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ (vetor de ganhos de realimentação calculado para a FCC). Qual é o vetor $\mathbf{K}$ que equivale, na representação de estados original, ao vetor $\mathbf{K}_{\mathrm{CC}}$?
   c) Desenhe um diagrama de blocos para a representaçao original do sistema linear, incluindo a realimentação de estados através da equação $u(t) = -\mathbf{Kx}(t) + r(t)$.
   d) Calcule a função de transferência $H(s) = Y(s)/R(s)$ considerando $u(t)$ definido no item (c).

2. Considere uma planta contínua que, controlada por realimentação de estados, tem o seu funcionamento em malha fechada descrito pelas equações a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Calcule a resposta $y(t)$ deste sistema às condições iniciais $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.
   b) Calcule a resposta $y(t)$ deste sistema ao degrau unitário.
   c) Calcule o tempo de pico da resposta $y(t)$ do item (b) e também o valor do seu *overshoot*.
   d) Calcule o valor do ganho $\bar{N}$ necessário para que o ganho DC do sistema seja unitário.

3. As perguntas a seguir referem-se à representação de $G(s) = 1/s^3$ na forma canônica controlável, com realimentação de estados definida por $\mathbf{K}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e com estimação de estados definida por $\mathbf{L}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

   a) Escreva as equações de estado que definem o compensador, considerando $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.
   b) Calcule a função de transferência do compensador do item (a), $D(s)$.
   c) Calcule $H(s) = Y(s)/R(s)$, considerando $\bar{N} = 1$ e $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. O sistema em malha fechada é estável?
   d) Repita o item (a), considerando $\mathbf{M} = (1/3)\mathbf{G}$.

4. Considere um sistema não-linear descrito pelas equações a seguir, sendo a, b, c e d constantes positivas.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -(c+u)x_2 + dx_1x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

   a) Linearize este sistema em torno de um ponto de equilíbrio diferente de zero, obtido com $u = 1$, obtendo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ associados à representação linearizada.
   b) Calcule os autovalores de $\mathbf{F}$ e discuta a estabilidade do sistema linearizado.
   c) Projete um estimador de estados de ordem reduzida para o sistema linearizado, satisfazendo $\alpha_e(s) = s+10$.
   d) Neste item, considere $a = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 2$. Calcule o vetor $\mathbf{K}$ que faz com que, através de realimentação $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$, os pólos do sistema fiquem em $-1 \pm j$.

5. O conjunto de equações a seguir representa um sistema de controle integral com dois integradores e uma perturbação $w(t)$ possivelmente em forma de rampa na entrada da planta.

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathrm{i}1}(t) = y(t) - r(t) \\ \dot{x}_{\mathrm{i}2}(t) = x_{\mathrm{i}1}(t) \\ u(t) = -k_1x_{\mathrm{i}1}(t) - k_2x_{\mathrm{i}2}(t) - k_3x_1(t) - k_4x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t) + w(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

   a) Desenhe um diagrama de blocos, a nível de integradores, representando as equações dadas neste enunciado.
   b) Calcule os valores de k_1, k_2, k_3 e k_4 para que, no sistema em malha fechada, tenhamos $\alpha_c(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$.
   c) Calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$
   d) Calcule a função de transferência $Y(s)/W(s)$

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}} \qquad \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{s} . \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$