UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2009
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 27 de abril de 2009

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere uma planta contínua representada pela função de transferência a seguir:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+10)}{(s+1+j)(s+1-j)(s+1)}$$

a) Escreva as equações de estado representando esta planta na forma canônica controlável e desenhe o diagrama de blocos, a nível de integradores, para esta representação.

b) Calcule a resposta $y(t)$ de $G(s)$ ao degrau unitário.

c) Considerando a representação de $G(s)$ na FCC, calcule a sua resposta $y(t)$ à condição inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Qual seria a resposta se $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

d) Com relação à resposta $y(t)$ calculada no item (b), indique de maneira aproximada: tempo de subida, tempo de pico, *overshoot* e tempo de estabelecimento.

2. Considere a seguinte planta contínua com realimentação de estados $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \bar{N}r$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(-\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r \right)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$ do sistema em malha fechada.

b) Desenhe um diagrama de blocos, a nível de integradores, representando o sistema dado acima. Inclua um ganho de entrada $\bar{N}$ adequado, de modo que o ganho DC do sistema seja igual a 1.0.

c) Calcule o ganho L de um estimador de estados de ordem reduzida para a planta em malha aberta, satisfazendo $\alpha_e(s) = s + 20$.

d) Repita o item (a), no caso em que a saída da planta é dada por $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$

3. Considere a planta contínua representada, no espaço de estados, pelos seguintes elementos:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule o vetor de ganhos para realimentação de estados, $\mathbf{K}$, de forma que os pólos do sistema em malha fechada sejam as raízes de $\alpha_c(s) = s^2 + 4s + 8$.

b) Calcule o vetor de ganhos para estimação dos estados, $\mathbf{L}$, de forma que os pólos do erro de estimação sejam as raízes de $\alpha_e(s) = s^2 + 20s + 100$.

c) Assumindo que a aplicação da entrada de referência é feita conforme $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$ e $\bar{N} = 0$, calcule a matriz $\mathbf{F}_c$ e os vetores $\mathbf{G}_c$ e $\mathbf{H}_c$ das equações a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_c r$$

$$y = \mathbf{H}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

d) Calcule a posição do(s) zero(s) do sistema em malha fechada (ou seja, as raízes de $\gamma(s)$) e calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$. Comente sobre o tempo de subida e o *overshoot* da resposta deste sistema ao degrau unitário.

4. Considere os dois sistemas não-lineares representados a seguir:

Sistema A	Sistema B
$\dot{x}_1 = x_1^3 + 1 + u$	$\dot{x}_1 = (x_1 + u)^3 + 1$
$\dot{x}_2 = \ln x_2 - 1 + u$	$\dot{x}_2 = \ln(x_2 + u) - 1$
$\dot{x}_3 = e^{x_3} - 1 + u$	$\dot{x}_3 = e^{x_3+u} - 1$
$y = x_1 + x_2 + x_3$	$y = x_1 + x_2 + x_3$

a) Calcule o ponto de equilíbrio obtido para o Sistema A com $u(t) = u_0 = -1$.

b) Encontre a matriz $\mathbf{F}$ e o vetor $\mathbf{G}$ que representam o Sistema A linearizado em torno do ponto de equilíbrio calculado no item (a).

c) Calcule o ponto de equilíbrio obtido para o Sistema B com $u(t) = u_0 = -1$.

d) Encontre a matriz $\mathbf{F}$ e o vetor $\mathbf{G}$ que representam o Sistema B linearizado em torno do ponto de equilíbrio calculado no item (c).

5. As equações a seguir descrevem um sistema de controle integral para a planta $G(s) = (s+1)/s^2$ representada na FCO:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Desenhe um diagrama de blocos, a nível de integradores, representando as equações acima.

b) Calcule a resposta $y(t)$ obtida quando $r(t)$ é um degrau unitário e $w(t) = 0$.

c) Calcule a resposta $y(t)$ obtida quando $w(t)$ é um degrau unitário e $r(t) = 0$.

d) Calcule a resposta $y(t)$ à condição inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$
$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$$

$$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F} \end{vmatrix}} \qquad \frac{\sigma^2+\omega_d^2}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2+\omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t)u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{s}.\frac{\sigma^2+\omega_d^2}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin(\omega_d t)]\}u(t)$$

$$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z};\ \mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$
$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$$
$$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$$

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\ ;\ \mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\ ;\ \mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}\ ;\ J_z = J$$

$$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K})\ ;\ \alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H})\ ;\ \alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{F}_{bb}+\mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$$

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_r = 1.8/\omega_n\ ;\ t_s = 4.6/\sigma\ ;\ \alpha_c(s) = (s+\sigma+j\omega_d)(s+\sigma-j\omega_d)\ ;\ t_p = \pi/\omega_d$$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}\ ;\ \zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta\ ;\ \theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$$
$$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$$

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$$
$$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$$
$$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$$
$$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$$

$$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$