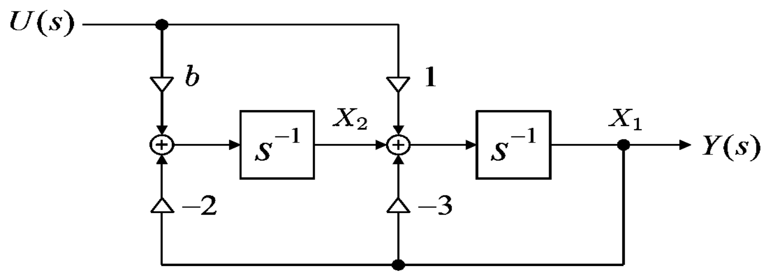
UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2008
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 26 de setembro de 2008

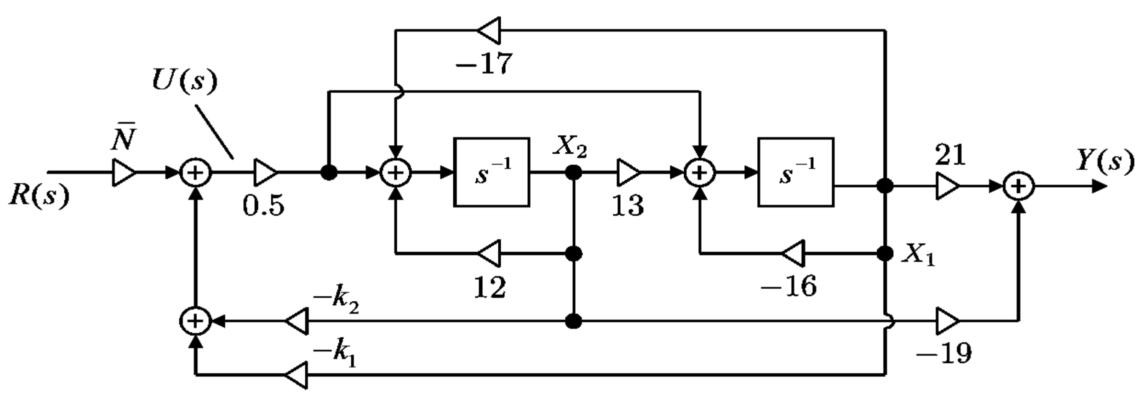
Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema linear descrito pelo diagrama de blocos a seguir:



   a) Calcule os valores de b para os quais o sistema não é controlável.
   b) Utilizando $b = 3$, calcule a resposta $y(t)$ do sistema ao degrau unitário.
   c) Utilizando $b = 2$, calcule a resposta $y(t)$ do sistema à condição inicial $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 1$.
   d) Utilizando $b = 2$, calcule a resposta $y(t)$ do sistema à condição inicial $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = -1$.

2. Considere uma planta controlada por realimentação de estados, conforme é descrito na figura a seguir:



   a) Considerando $k_1 = k_2 = 0$ e $\bar{N} = 1$, calcule o tempo de subida, o tempo de estabelecimento, o tempo de pico e o *overshoot* da resposta desta planta ao degrau unitário.
   b) Repita o item (a), considerando $k_1 = 7$, $k_2 = 1$ e $\bar{N} = 1$.
   c) Qual deve ser o valor de $\bar{N}$ para que o ganho DC do sistema do item (b) seja igual a 1.0?
   d) Calcule a transformação linear $\mathbf{T}$ que leva a representação desta planta (sistema do item (a)) no espaço de estados para a forma canônica controlável.

3. Considere um sistema de controle por realimentação de estados, em que a planta e o compensador são descritos pelas equações a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -3 & -27 \\ 0 & 10 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

a) Calcule a função de transferência $G(s)$ da planta.

b) Considerando $b = 0$, calcule a função de transferência $D(s)$ do compensador.
Dica: nos itens (a) e (b), você pode obter $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{L}$ por comparação com as equações da planta e do estimador de estados (levando em consideração também as definições apropriadas de $u(t)$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{GK} \\ \mathbf{LH} & \mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{LH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

c) Considerando $b = 0$, calcule a função de transferência $H(s)$ do sistema em malha fechada, ou seja, $Y(s)/R(s)$. Explique as posições dos pólos e zeros de $H(s)$.

d) Se fizermos $b = 1$, como ficará $H(s)$?

4. Uma planta contínua é definida da seguinte forma no espaço de estados:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ da regra de controle, de forma tal que $\alpha_c(s) = s^2 + 4s + 4$.

b) Projete um estimador de estados de ordem reduzida para esta planta (ou seja, calcule L) de forma tal que o erro de estimação tenha seu pólo em $s = -10$.

c) Calcule a função de transferência $D(s)$ do compensador obtido com os resultados dos itens (a) e (b).

d) Calcule $G(s)/(1 - G(s)D(s))$ e diga qual é o valor de $\bar{N}$ necessário para que o ganho DC do sistema em malha fechada seja igual a 1.0.

5. As equações a seguir descrevem uma planta controlada por realimentação de estados, com uma malha de controle integral:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -k_i & -k_1 & -k_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

a) Desenhe um diagrama de blocos que represente as equações acima, mostrando claramente a planta.

b) Calcule os ganhos de realimentação k_i, k_1 e k_2, de forma tal que o sistema em malha fechada tenha pólos em $s = -1$, $s = -1 - j$ e $s = -1 + j$.

c) Utilizando os ganhos calculados no item (b), calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$.

d) Utilizando os ganhos calculados no item (b), calcule a função de transferência $Y(s)/W(s)$.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathrm{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}} \qquad \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{s} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$