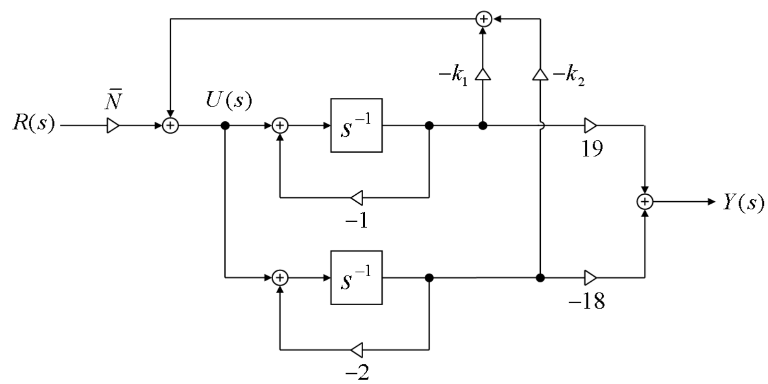
UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2008
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 25 de abril de 2008

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere uma planta representada pela função de transferência $G(s) = Y(s)/U(s) = 1/(s^2 + 1)$.
   a) Represente esta planta na forma canônica observável, e desenhe o diagrama de blocos desta representação.
   b) Utilizando $\mathbf{K} = [5\ 5]$ (calculado para a forma canônica observável) e assumindo que a entrada da planta é $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)$, calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$.
   c) Calcule a resposta do sistema do item (b) à condição inicial $\mathbf{x}(0) = [1\ 1]^T$.
   d) Calcule a saída do sistema do item (b) quando as condições iniciais são nulas e $r(t)$ é um degrau unitário.

2. Considere o diagrama de blocos a seguir:



   a) Calcule $G(s) = Y(s)/U(s)$.
   b) Calcule k_1 e k_2 de forma que a resposta do sistema em malha fechada ao degrau tenha *overshoot* igual a 5% e tempo de pico igual a $\pi/3$ segundos.
   c) Usando k_1 e k_2 do item (b), e assumindo $\bar{N} = 1$, qual é a função de transferência do sistema em malha fechada?
   d) Usando k_1 e k_2 do item (b), qual é o valor de $\bar{N}$ para o qual $\lim_{s\to 0} Y(s)/R(s) = 1$?

3. Considere uma planta representada pela função de transferência $G(s) = 1/s^3$.
   a) Represente esta planta no espaço de estados. A forma escolhida para representação é livre.
   b) Usando a representação que você escolheu no item (a), calcule o vetor $\mathbf{L}$ para um estimador de estados de ordem reduzida, de forma que os pólos do erro de estimação sejam as raízes do polinômio $\alpha_e(s) = s^2 + 20s + 100$.
   c) Considerando $\mathbf{K}_{CC} = [3\ 3\ 1]$ (note que foi calculado para a forma canônica *controlável*), calcule a função de transferência do compensador $D(s)$.
   d) Usando $D(s)$ do item (c), calcule $Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$ e comente o resultado obtido (ou seja, indique a origem das raízes do numerador obtido e do denominador obtido).

4. Considere um sistema não-linear representado pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = e^{x_2(t)} - u(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \\ \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

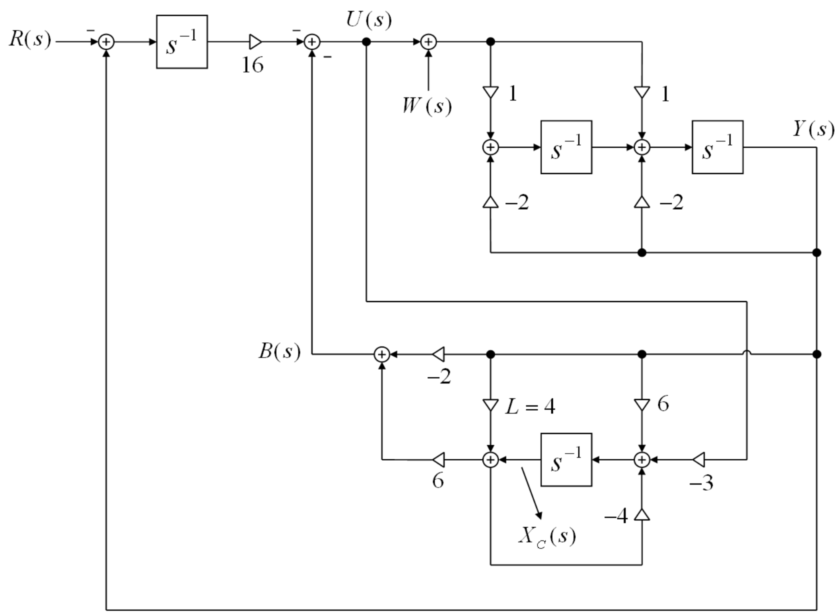
a) Calcule o ponto de equilíbrio do sistema, considerando $u(t) = u_0 = 1$.

b) Encontre a matriz $\mathbf{F}$ e o vetor $\mathbf{G}$ que representam o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio encontrado no item (a).

c) Desenhe o diagrama de blocos do sistema linearizado, e calcule a sua função de transferência $G(s)$.

d) Discuta a controlabilidade e a observabilidade do sistema linearizado.

5. Considere o sistema de controle integral representado pelo diagrama de blocos a seguir:



a) Calcule a função de transferência da planta em malha aberta (ou seja, $Y(s)/U(s)$ assumindo $W(s) = 0$).

b) Escreva uma equação algébrica que defina $B(s)$ unicamente em função de $U(s)$ e $Y(s)$ (sugestão: como variável auxiliar nos cálculos intermediários, utilize $X_C(s)$).

c) Substitua o resultado do item (b) na equação:

$$U(s) = -B(s) - (16/s)(Y(s) - R(s))$$

e daí obtenha $U(s)$ unicamente em função de $Y(s)$ e $R(s)$. Em seguida, substitua esta expressão de $U(s)$ na equação:

$$G(s)(U(s) + W(s)) = Y(s)$$

e daí obtenha uma expressão para $Y(s)$ unicamente em função de $R(s)$ e $W(s)$.

d) Indique as funções de transferência $Y(s)/R(s)$ e $Y(s)/W(s)$, e fatore o denominador destas funções de transferência em $\alpha_c(s)\alpha_e(s)$ (sugestão: para a fatoração, obtenha primeiro $\alpha_e(s)$ a partir de $L = 4$).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathrm{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}} \qquad \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{s} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$