UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2007
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 28 de Setembro de 2007

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere um sistema contínuo representado pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Calcule a resposta deste sistema à rampa $tu(t)$, com condições iniciais nulas.
   b) Calcule a resposta deste sistema às condições iniciais dadas por $\mathbf{x}(0) = [\ 1\ 0\ ]^T$.
   c) Calcule a resposta deste sistema às condições iniciais dadas por $\mathbf{x}(0) = [\ 0\ 1\ ]^T$.
   d) Calcule a resposta deste sistema à rampa $tu(t)$, com condições iniciais dadas por $\mathbf{x}(0) = [\ \text{-1}\ 1\ ]^T$.

2. Considere uma planta contínua descrita pela equação diferencial a seguir:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

   com condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 2$.

   a) Escreva equações de estado representando esta planta na forma canônica controlvél. Desenhe o diagrama de blocos correspondente às equações de estado. Calcule também o vetor $\mathbf{x}(0)$ com as condições iniciais da planta.
   b) Repita o item (a), para a forma canônica observável.
   c) Repita o item (a), para a forma canônica modal com $\mathbf{H} = [\ 1\ 1\ ]$.
   d) Repita o item (a), para a representação no espaço de estados obtida a partir da FCC através da transformação linear $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, com:

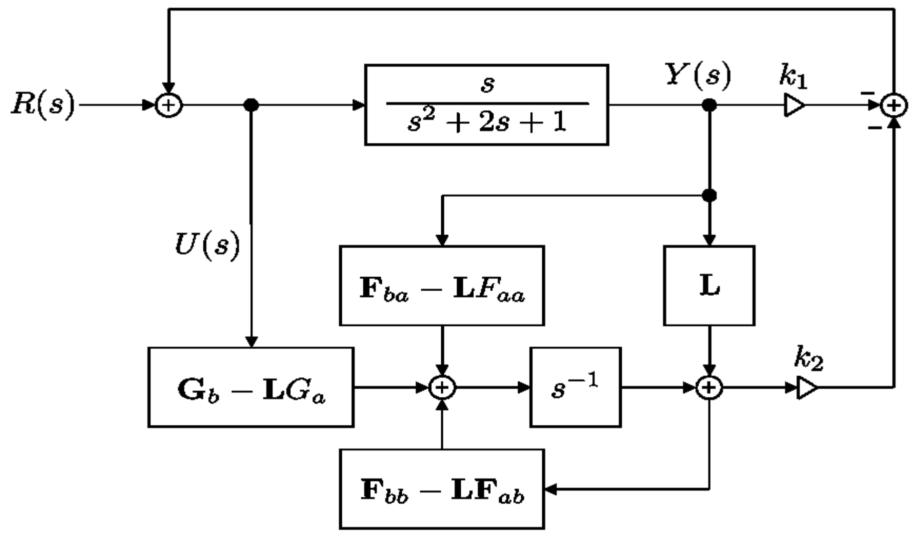
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere uma planta contínua representada pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

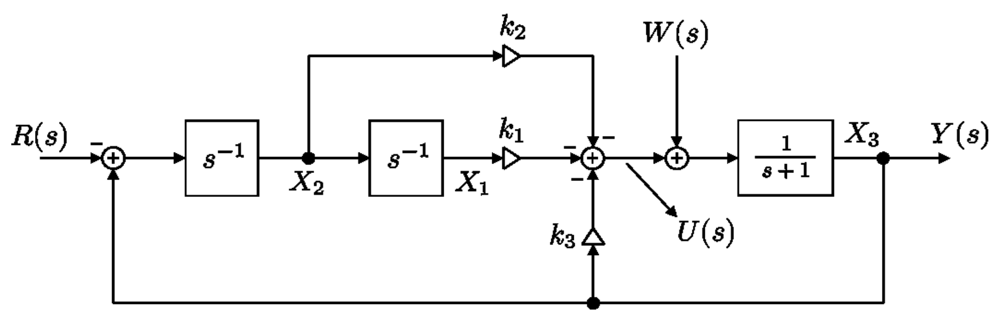
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Projete um controlador $\mathbf{K}$ de forma que $\alpha_c(s) = s^2 + 4s + 4$.
   b) Projete um estimador de estados de ordem reduzida L de forma que $\alpha_e(s) = s + 10$.
   c) Calcule a função de transferência $D(s)$ do compensador obtido com os resultados dos itens (a) e (b).
   d) Usando os resultados dos itens (a) e (b), complete o diagrama de blocos a seguir e calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$. *Note que o compensador é autônomo.*



4. Considere o diagrama de blocos a seguir:

   a) Escreva equações de estado para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.
   b) Calcule k_1, k_2 e k_3 para que o polinômio característico do sistema em malha fechada seja $\alpha_c(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$.
   c) Usando k_1, k_2 e k_3 do item (b), mostre que: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{12s+8}{s^3+6s^2+12s+8}$
   d) Usando k_1, k_2 e k_3 do item (b), mostre que: $\dfrac{Y(s)}{W(s)} = \dfrac{s^2}{s^3+6s^2+12s+8}$



5. Considere um sistema não-linear contínuo no tempo, descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \ln(x_1(t) + x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = e^{x_1(t)-x_2(t)} + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

   a) Calcule o ponto de equilíbrio do sistema quando $u(t) = u_0 = -1$.
   b) Linearize o sistema em torno do ponto de equilíbrio. Escreva as equações de estado do sistema linearizado.
   c) Desenhe um diagrama de blocos para o sistema linearizado.
   d) Para o sistema linearizado, calcule $|\mathcal{C}|$, $|\mathcal{O}|$ e as raízes da equação $|s\mathbf{I} - \mathbf{F}| = 0$. Comente os resultados.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}} \qquad \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{s} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$