UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2007
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 27 de Abril de 2007

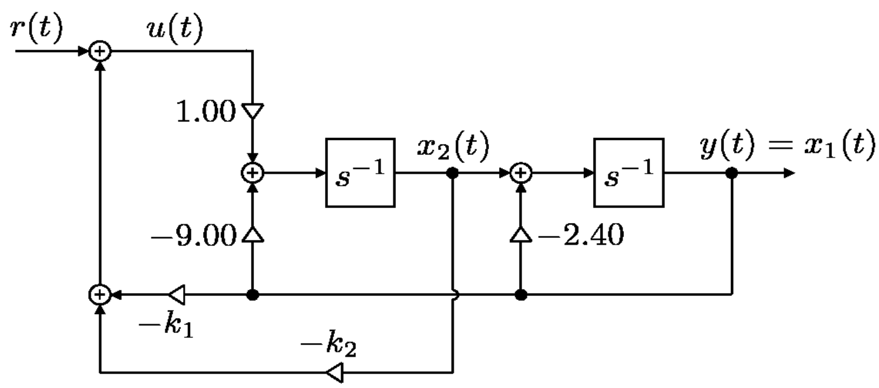
Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Uma planta contínua é representada no espaço de estados pelas matrizes:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   a) Calcule a resposta desta planta à condição inicial $\mathbf{x}(0) = [1\ 1]^T$.
   b) Calcule a resposta desta planta ao degrau unitário, incluindo a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [1\ 1]^T$.
   c) Utilizando uma transformação linear apropriada, represente este sistema na forma canônica controlável.
   d) Utilizando uma transformação linear apropriada, represente este sistema na forma canônica observável.

2. Considere o diagrama de blocos a seguir:



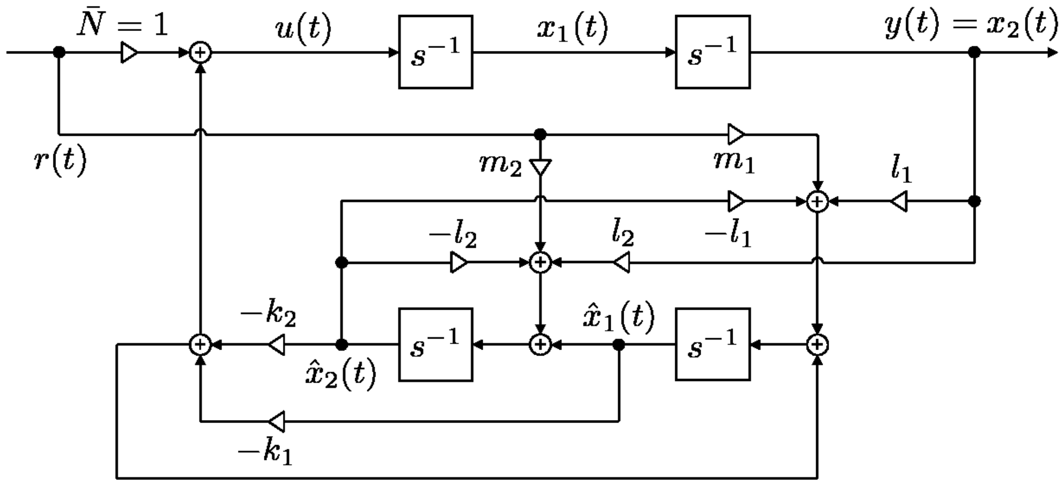
   a) Assumindo $k_1 = k_2 = 0$, escreva a função de transferência $Y(s)/R(s)$.
   b) Seja $y_0(t)$ a resposta ao degrau do sistema acima, com $k_1 = k_2 = 0$. Calcule o tempo de subida e o *overshoot* de $y_0(t)$.
   c) Calcule k_1 e k_2 de forma que o *overshoot* seja reduzido a 5%, e o tempo de subida reduzido a 0.3 seg.
   d) Usando k_1 e k_2 do item (c), qual será a função de transferência $Y(s)/R(s)$?

3. Considere uma planta contínua representada no espaço de estados por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule uma transformação linear $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$ tal que $\mathbf{H}_z = [1\ 0]$.
   b) Calcule $\mathbf{L}$ para o estimador de estados de ordem reduzida, de forma que o erro de estimação tenha pólo em $s = -10$.
   c) Considerando $\mathbf{K}_x = [2\ 1]$ (calculado na representação de estados original), encontre a descrição no espaço de estados para o compensador baseado no estimador de estados de ordem reduzida (ou seja, calcule $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{G}_r$, $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{J}_r$).
   d) Calcule a função de transferência do compensador, $D(s)$. Verifique o resultado obtido.

4. Considere o diagrama de blocos a seguir:



a) Escreva equações de estado para $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\hat{x}_1(t)$, e $\hat{x}_2(t)$.

b) Calcule $\mathbf{K}$ para que $\alpha_c(s) = s^2 + 2s + 1$.

c) Calcule $\mathbf{L}$ para que $\alpha_e(s) = s^2 + 10s + 25$.

d) calcule $\mathbf{M}$ para que $\gamma(s) = s^2 + 6s + 5$.

5. Considere um sistema não-linear (de ordem $n = 1$) descrito pelas equações a seguir:

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + u(t)$$

$$y(t) = 2x(t)$$

a) Encontre o ponto de equilíbrio $x_0 < 0$ obtido quando $u(t) = u_0 = -1$.

b) Calcule $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, e $\mathbf{H}$ para o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio.

c) Considerando controle integral com $\dot{x}_i(t) = y(t) - r(t)$ e $u(t) = -k_i x_i(t) - k_0 x(t)$, calcule k_i e k_0 de modo que os pólos do sistema em malha fechada fiquem em $s_1 = -4$ e $s_2 = -5$.

d) Desenhe um diagrama de blocos, a nível de integradores, para o sistema de controle do item (c).

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathrm{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) u(t)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s} . \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} \longleftrightarrow \{1 - e^{-\sigma t}[\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t)]\} u(t)$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$
$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0 \ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0 \ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$; $t_p = \pi/\omega_d$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$