UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Segundo Semestre de 2006
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 29 de Setembro de 2006

Todos os itens da prova têm o mesmo valor: 0.5 ponto cada. Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere uma planta representada pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t)$$

   a) Calcule a resposta desta planta ao degrau unitário.
   b) Calcule a resposta à condição inicial $\mathbf{x}_0 = [a\ b]^T$, sendo a e b números reais quaisquer.
   c) Calcule a função $x_2(t)$ que descreve a segunda variável de estado, quando a entrada é zero e a condição inicial é $\mathbf{x}_0 = [1\ 0]^T$.
   d) A planta é controlável ? É observável ? É estável ?

2. Considere uma planta representada pelas equações de estado a seguir:

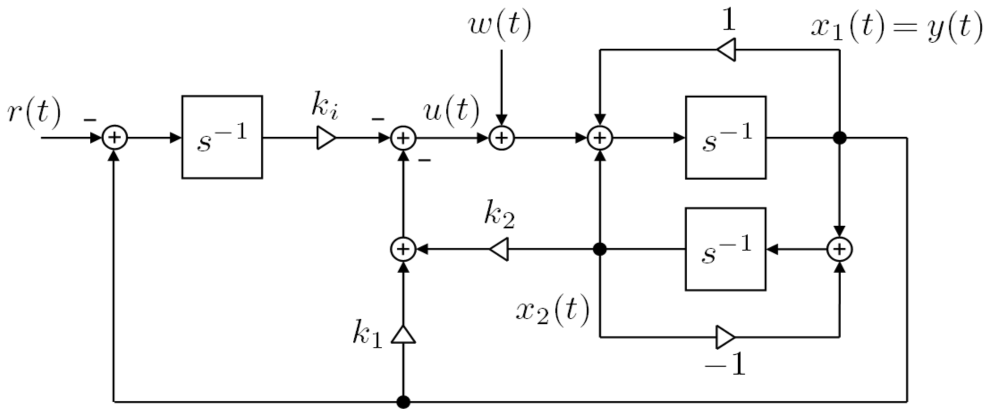
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 20 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Considerando a resposta deste sistema ao degrau, calcule o seu tempo de subida (t_r), *overshoot* (M_P), tempo de pico (t_p), e tempo de estabelecimento (t_s).
   b) Utilizando uma realimentação de estados descrita por $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \bar{N}r(t)$, com $\mathbf{K} = [2\ 6]$, qual será a posição dos pólos do sistema em malha fechada ?
   c) Considerando a resposta ao degrau do sistema em malha fechada do item (b), quais serão os tempos de subida, pico, e estabelecimento ? E qual será o *overshoot* ?
   d) Calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$ do sistema em malha fechada do item (b). Use o valor apropriado de $\bar{N}$ para que o ganho DC seja 1.0.

3. Para os itens a seguir, considere uma planta com função de transferência $G(s) = 1/(s^2 - 1)$:

   a) Projete um estimador de estados $\mathbf{L}$ de forma tal que o erro de estimação tenha 2 pólos em $s = -4$. Para isso, use a representação que você preferir no espaço de estados.
   b) Assumindo $\mathbf{K} = [4\ 5]$, calculado para o sistema $G(s)$ representado na FCC, escreva as equações de estado do compensador que é obtido usando $\mathbf{L}$ do item (a). A representação no espaço de estados é livre.
   c) Calcule $G(s)/(1 - G(s)D(s))$, e justifique o resultado obtido.
   d) Se $\bar{N} = 1$, qual é o valor de $\mathbf{M}$ para o qual a função de transferência em malha fechada é $Y(s)/R(s) = 1/(s+2)^2$? A representação no espaço de estados é livre.



4. Considere o diagrama de blocos representado na figura acima:

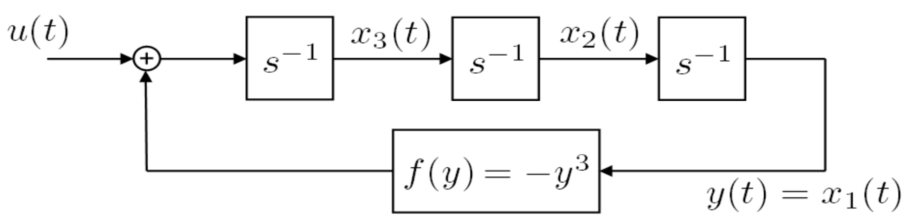
   a) Identifique a planta, e represente-a utilizando equações de estado. Calcule $G(s)$.

   b) Se a função de transferência $Y(s)/R(s)$ for igual a $27(s+1)/(s+3)^3$, quais são os valores de k_i, k_1, e k_2 ?

   c) Usando os valores de k_i, k_1, e k_2 do item (b), qual será a função de transferência $Y(s)/W(s)$?

   d) Projete um estimador de estados de ordem reduzida (calcule L) de forma que o erro na estimação de $x_2(t)$ tenha um pólo em $s = -6$.

5. Considere o diagrama de blocos representado na figura a seguir:



   a) Calcule o ponto de equilíbrio obtido com $u = u_0 = 1$, considerando que x_{10} deve ser um número real.

   b) Linearize o sistema em torno do ponto de equilíbrio encontrado no item (a).

   c) Desenhe um diagrama de blocos do sistema linearizado.

   d) Para o sistema linearizado, calcule $|\mathcal{C}|$, $|\mathcal{O}|$, e as raízes da equação $|s\mathbf{I} - \mathbf{F}| = 0$. Comente os resultados.

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$

$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$

$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$; $\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCC: $\mathbf{p}_2 = [0\ 1]\mathcal{C}^{-1}$, e $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$. Transformação para a FCO: $\mathbf{t}_2 = \mathcal{O}^{-1}[0\ 1]^T$, e $\mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2$.

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $t_p = \pi/\omega_d$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$Y(s)/R(s) = G(s)/(1 - G(s)D(s))$
$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$