UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2006
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 28 de Abril de 2006

Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere uma planta representada pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3\alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Desenhe o diagrama de blocos desta planta (a nível de integradores).
   b) Calcule o valor de α para o qual a planta não é controlável.
   c) Calcule o valor de α para o qual a planta não é observável.
   d) Assumindo $\alpha = 1$, esta planta é estável ?

2. Considere uma planta cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{s+20}{(s+10)(s^2+2s+2)}$$

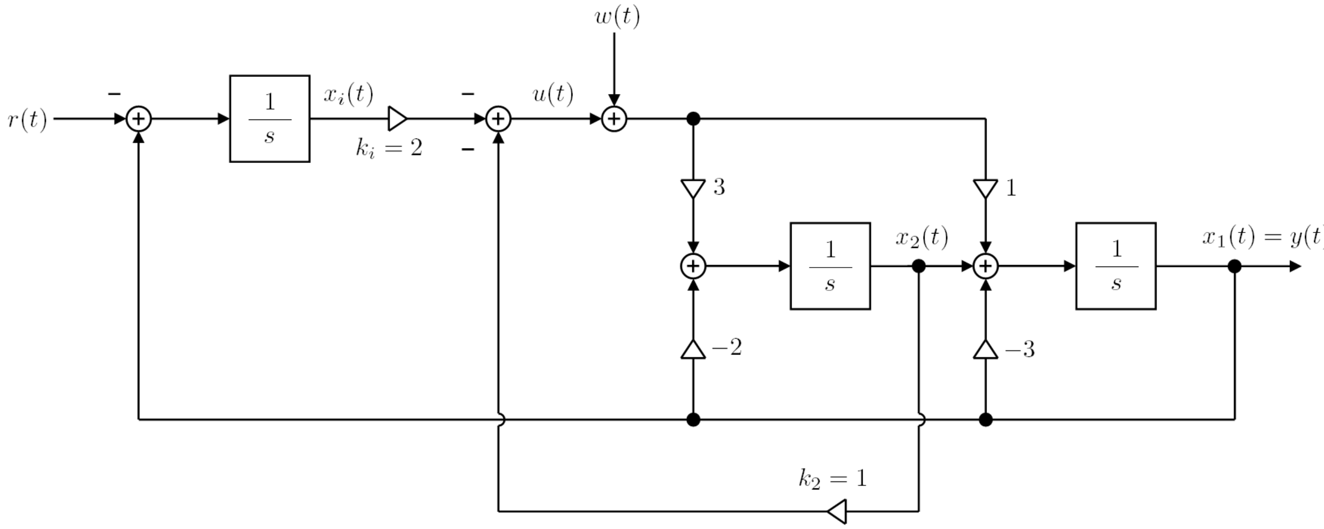
   a) Calcule o *overshoot* M_P na resposta deste sistema ao degrau, e também o instante t_p em que o valor máximo da resposta ao degrau ocorre.
   b) Calcule o polinômio característico $\alpha_c(s)$ (a ser obtido em malha fechada) de forma que o tempo de pico t_p seja reduzido à metade, mantendo-se o mesmo M_P.
   c) Qual é o vetor $\mathbf{K}$ que, usado na realimentação de estados na forma canônica controlável, proporciona os pólos em malha fechada previstos no item (b) ?

3. Considere uma planta representada pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   a) Calcule o vetor $\mathbf{K}$ para a realimentação dos estados desta planta, de forma a obter pólos em malha fechada nas posições $-2 \pm 2j$.
   b) Calcule L (escalar) para obter um estimador de estados de ordem reduzida, com pólo do erro de estimação na posição -10.
   Dica 1: Não esqueça de aplicar uma transformação linear $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ apropriada, que faça $\mathbf{H}_{\mathbf{z}} = [1\ 0]$.
   c) Calcule as equações de estado do compensador obtido com $\mathbf{K}$ e L dos itens (a) e (b), sendo $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$.
   Dica 2: Não esqueça de corrigir o vetor $\mathbf{K}$ para o mesmo sistema de coordenadas do vetor $\mathbf{z}$.
   d) Calcule a função de transferência $D(s)$ do compensador do item (c).
   e) Calcule a função de transferência $G(s)$ (da planta).
   f) Calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, $H(s) = Y(s)/R(s)$, sendo $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$. Justifique o resultado obtido (ou seja, explique a origem dos pólos e zeros em malha fechada).
   g) Qual o ganho DC do sistema em malha fechada ?



4. Considere o diagrama de blocos representado na figura acima:

   a) Identifique a planta, e represente-a utilizando equações de estado.

   b) Represente o diagrama de blocos completo utilizando equações de estado.
      Dica 1: Substitua a representação da planta, encontrada no item (a), na equação que define o sistema de controle integral (ver formulário).
      Dica 2: Substitua também $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$.

   c) Calcule a função de transferência $Y(s)/R(s)$.
      Dica 3: Não calcule completamente a inversa $(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i\mathbf{K})^{-1}$. Somente o termo $(2, 1)$ da matriz inversa é necessário. Este termo é igual a $-A/B$, onde A é o determinante 2×2 que se obtém ao remover a linha e a coluna do termo $(1, 2)$ na matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i\mathbf{K}$, e B é o determinante de $s\mathbf{I} - \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i\mathbf{K}$.
      Dica 4: Note que $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s + 1)(s + 2)(s + 3)$.

   d) Calcule a função de transferência $Y(s)/W(s)$.

   e) Calcule a resposta $y(t)$ a um degrau unitário na entrada $r(t)$ (assumindo $w(t) = 0$).

   f) Calcule a resposta $y(t)$ a um degrau unitário na entrada $w(t)$ (assumindo $r(t) = 0$).

5. Considere as equações a seguir:

$$L\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$C\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - e^{\alpha x_2(t)} + u(t)$$

   Estas equações representam a associação, em paralelo, de um indutor L, um capacitor C, e um dispositivo não-linear cuja característica $I \times V$ é $i = i_0 e^{\alpha v}$, sendo $i_0 = 1$ A. O conjunto é excitado por uma fonte de corrente $u(t)$. As variáveis de estado são a corrente através do indutor ($x_1 = i_L$) e a tensão sobre o capacitor ($x_2 = v_c$). A saída desejada é a tensão sobre o conjunto de componentes, ou seja $y(t) = x_2(t)$.

   a) Desenhe o diagrama esquemático do circuito, indicando todas as variáveis no diagrama, e justifique sucintamente as equações acima utilizando KCL e KVL.

   b) Calcule o ponto de equilíbrio (x_{10}, x_{20}) obtido com entrada constante $u(t) = u_0 = 3$ A.

   c) Linearize o sistema em torno do ponto de equilíbrio definido no item (b), obtendo $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, e $\mathbf{H}$.

   d) O sistema linearizado é estável, se $L = 1$ H, $C = 1$ F, e $\alpha = 2$ V^{-1} ?

Boa sorte !

Lista de Equações - Controle Contínuo

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{Hx}$ + Ju

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$

$\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$; $\mathbf{z} = \mathbf{Px}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FT}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{HT}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{LF}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{bmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $t_p = \pi/\omega_d$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{LF}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{LG}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{LF}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{LG}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$