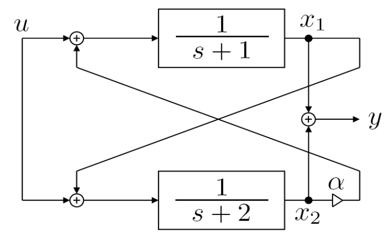
UFRJ / Escola Politécnica / DEL – Primeiro Semestre de 2005
EEL-760 – Controle Linear II
Prova Parcial #1 – 26 de Setembro de 2005

Tempo de prova: 2h30min.

1. Considere o sistema indicado na figura abaixo:



   a) Escreva a sua representação no espaço de estados.
   b) Calcule o valor de α para o qual o sistema não é controlável.
   c) Calcule o valor de α para o qual o sistema não é observável.
   d) Qual é o intervalo de valores de α para os quais o sistema não é estável ?
   e) Calcule a função de transferência do sistema.

2. Considere o sistema representado pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

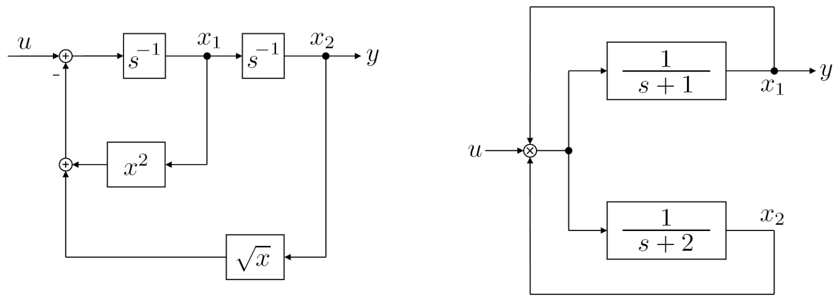
   a) Calcule a resposta $y(t)$ deste sistema ao degrau unitário, com condições iniciais nulas.
   b) Calcule a resposta $y(t)$ ao degrau, com condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [1\ 0]^T$.
   c) Calcule a resposta $y(t)$ ao degrau, com condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [11\ 9]^T$.

3. Considere o sistema representado pelas equações de estado a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

   a) Calcule o vetor de realimentação de estados ($\mathbf{K}$) para obter pólos em $s = -1 \pm j$ em malha fechada. Projete um estimador de estados de ordem completa (calcule $\mathbf{L}$), de forma que os pólos do erro na estimação dos estados fiquem em $s = -2 \pm 2j$.
   b) Calcule a função de transferência $G(s)$ da planta. Calcule a função de transferência $D(s)$ do compensador projetado a partir dos vetores $\mathbf{K}$ e $\mathbf{L}$ encontrados no item (a).
   c) Assumindo $\bar{N} = 1$ e $\mathbf{M} = 0$, calcule a função de transferência do sistema em malha fechada, $Y(s)/R(s)$. Verifique que o denominador da função de transferência pode ser fatorado em $\alpha_c(s)\alpha_e(s)$. Qual é o ganho DC relacionado à função de transferência $Y(s)/R(s)$?
   d) Se um estimador de ordem reduzida fosse utilizado, qual deveria ser o valor de L para que o pólo do erro de estimação ficasse em $s = -6$?
   e) Assumindo $\bar{N} = 2/3$ e usando os vetores $\mathbf{K}$ e $\mathbf{L}$ do item (a), calcule $\mathbf{M}$ de forma a posicionar dois zeros do sistema em malha fechada sobre $s = -2 \pm 2j$.



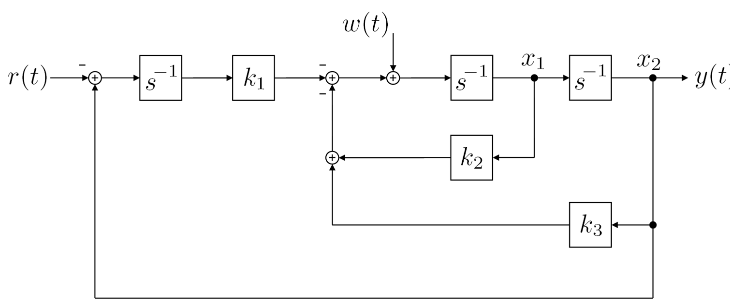
(a) (b)

4. Considere os sistemas não-lineares indicados na figura acima:

   a) Linearize o sistema (a) em torno do ponto de equilíbrio com entrada $u_0 = 2$. Calcule os pólos do sistema linearizado, e também as suas matrizes de controlabilidade e de observabilidade.

   b) Faça o mesmo para o sistema (b), só que usando $u_0 = 1$. Ignore o ponto de equilíbrio para o qual $x_{10} = x_{20} = 0$.

5. Para o sistema indicado na figura abaixo:



   a) Quais são os valores de k_1, k_2, e k_3 para os quais a função de transferência do sistema tem um pólo triplo em $s = -1$?

   b) Calcule a função de transferência da perturbação $w(t)$ para a saída $y(t)$.

Boa sorte !

Lista de Equações

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$
$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{Ju}$

$Y(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0) + JU(s)$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x$

$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$; $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_z\mathbf{z} + \mathbf{G}_z u$
$y = \mathbf{H}_z\mathbf{z} + J_z u$

$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$; $\mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}$; $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T}$; $J_z = J$

$\alpha_c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$
$\alpha_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\mathbf{F})$

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t_r = 1.8/\omega_n$; $t_s = 4.6/\sigma$; $\alpha_c(s) = (s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)$

M_P	5%	16%	25%	35%
ζ	0.7	0.5	0.4	0.3

$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$; $\zeta = \sigma/\omega_n = \sin\theta$; $\theta = \arctan(\sigma/\omega_d)$

$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r\mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y$
$u = \mathbf{H}_r\mathbf{x}_c + J_r y$

$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)\mathbf{K}_b$
$\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a)K_a$
$\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_b$
$J_r = -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}r$. Se $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$, então: $\gamma(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

$\frac{1}{s+1}$

$\frac{1}{s+2}$

$u(t)$

$x_1(t)$

$x_2(t)$

α

$y(t)$

(a)

(b)

s^{-1}

x^2

$\sqrt{x}$

k_1 k_2 k_3 $r(t)$ $y(t)$ $w(t)$