Controle II — Gabaritos Listas de Exercícios #8

## Lista #2

① $G(s) = \dfrac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s+3} = \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{(-1)}{s+3}$

$A = \dfrac{2}{1} = 2 \qquad B = \dfrac{1}{-1} = -1$

$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad H = [1 \ \ 1] \qquad J = 0$

$F - GK = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} [k_1 \ \ k_2] = \begin{bmatrix} -2-2k_1 & -2k_2 \\ k_1 & -3+k_2 \end{bmatrix}$

$|sI - F + GK| = \begin{vmatrix} s+2+2k_1 & 2k_2 \\ -k_1 & s+3-k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (2k_1 - k_2 + 5)s + 6 - 2k_2 + 6k_1 - \cancel{2k_1k_2} + \cancel{2k_1k_2}$

$\alpha_c(s) = (s+10+10j)(s+10-10j) = s^2 + 20s + 200$

COMPARANDO OS COEFICIENTES:

$2k_1 - k_2 = \cancel{x}\,15 \quad (x-2)$

$6k_1 - 2k_2 = 194$

$2k_1 = 164 \longrightarrow k_1 = \cancel{x}\,82$

$k_2 = 149$

$K = [82 \ \ 149]$

OBS.: VERIFICAÇÃO:

K= acker([-2 0; 0 -3], [2; -1], [-10-10j; -10+10j]);

② $F = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = [1 \ \ 4] \qquad J = 0$

$F - GK = \begin{bmatrix} -5-k_1 & -6-k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$|sI - F + GK| = \begin{vmatrix} s+k_1+5 & k_2+6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + (k_1+5)s + k_2 + 6$

$\alpha_c(s) = s^2 + 20s + 200$

COMPARANDO OS COEFICIENTES: $k_1 = 15 \quad k_2 = 194 \qquad K = [15 \ \ 194]$

EM MALHA FECHADA: $\begin{aligned} x' &= (F - GK)x \\ y &= Hx \end{aligned} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x' &= \begin{bmatrix} -20 & -200 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \\ y &= [1 \ \ 4]\,x \end{aligned} \right.$

$Y(s) = H(sI - F + GK)^{-1}x(0) = [1 \ \ 4] \begin{bmatrix} s+20 & 200 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{\overbrace{[1 \ \ 4] \begin{bmatrix} s & -200 \\ +1 & s+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}}}{s^2 + 20s + 200}$

$Y(s) = \dfrac{s+4}{s^2+20s+200} = \dfrac{A}{s+10+10j} + \dfrac{A^*}{s+10-10j}$

$A = \left.\dfrac{s+4}{s+10-10j}\right|_{s=-10-10j} = \dfrac{-6-10j}{-20j} = \dfrac{10-6j}{20} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3j}{10}$

$y(t) = \left[ \underbrace{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3j}{10}\right) e^{(-10-10j)t}} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3j}{10}\right) e^{(-10+10j)t} \right] u(t)$

$e^{-10t}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3j}{10}\right)\left(\cos(10t) - j\sin(10t)\right)$

$e^{-10t}\left(\dfrac{1}{2}\cos(10t) - \dfrac{3}{10}\sin 10t\right) + j \ldots$

A PARTE IMAGINÁRIA DA SOMA NÃO É NECESSÁRIA, PORQUE $y = z + z^*$; ENTÃO, $y = 2\mathrm{Re}(z)$.

$y(t) = e^{-10t}\left(\cos(10t) - \dfrac{3}{5}\sin(10t)\right)u(t)$

VERIFICAÇÃO NO MATLAB:

```
sys = ss([-20 -200 ; 1 0], [0 ; 0], [1 4], 0);
a=0 ; b=5; pts= 10000; stp = (b-a)/pts ; t= a: stp: (b-stp);
u= ones(size(t));
lsim(sys, u, t, [1; 0]);
hold on;
plot(t, exp(-10t).*(cos(10t) - 0.6 sin(10t)), 'r-');
```

③ ~~...~~ UMA OPÇÃO SERIA USAR A FORMA CANÔNICA OBSERVÁVEL. PARA TORNAR A SOLUÇÃO MAIS GENÉRICA, VAMOS USAR ALGUMA OUTRA OPÇÃO QUE NÃO A FCO. POR EXEMPLO, VAMOS OBTER UMA REPRESENTAÇÃO

Lista #2 (Continuação): #57 3)

MATRICIAL A PARTIR DA FCM, USANDO $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\left( T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

ENTÃO, A FORMA MATRICIAL ESCOLHIDA FICA:

$$F = \underbrace{\underset{(T^{-1})}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(F_{cm})}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}}_{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}} \underset{(T)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$G = \underset{(T^{-1})}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(G_{cm})}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \underbrace{[1 \ \ 1]}_{(H_{cm})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(T)} = \cancel{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \, [1 \ \ 2]$$

$J = 0$

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ \ 2]\, x \end{cases}$$

RESPOSTA À ENTRADA $e^{-t}u(t)$ COM C.I. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$Y(s) = (H(sI-F)^{-1}G + J)\,U(s) + H(sI-F)^{-1}x(0)$$

$$Y(s) = [1 \ \ 2] \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \underbrace{[1 \ \ 2] \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

OBS.: ESTA PARTE DA RESPOSTA DEPENDE DA REPRESENTAÇÃO MATRICIAL ESCOLHIDA POR CADA PESSOA.

$$Y(s) = \frac{\overbrace{[1 \ \ 2] \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}^{[s+3 \quad 2s+5]} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{[1 \ \ 2] \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{3s+8}{(s+2)(s+3)} = \frac{3s^2+12s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$(3s+8)(s+1) = 3s^2 + 11s + 8$

$$= \frac{3/2}{s+1} + \frac{3/2}{s+3}$$

$A = \frac{3}{2}$ ; $B = 0$ ; $C = \frac{3}{2}$

$y(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$ ⟶ DEPENDE DA FORMA MATRICIAL ESCOLHIDA, POR CAUSA DO $x(0) \neq 0$.

VERIFICAÇÃO NO MATLAB:

```
sys = ss([-2 1 ; 0 -3], [3 ; -1], [1 2], 0);
a=0 ; b=5 ; pts=10000 ; stp=(b-a)/pts ; t=a:stp:(b-stp);
~~u=ones(size(t));~~ u=exp(-t);
lsim(sys,u,t,[1;1]);
hold on;
plot(t,(exp(-t)+exp(-3t))*1.5,'r-');
```

4) a) PARA O SISTEMA #1: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{-1}{40} \\ \frac{39}{40} & \frac{-195}{40} \end{bmatrix}$ ; $\mathcal{C}^{-1} = \frac{-40}{156} \begin{bmatrix} -195 & 1 \\ -39 & 1 \end{bmatrix}$ ; $\alpha_c(s) = (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$

$$\alpha_c(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^2 + 9 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \alpha_c(F) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FÓRMULA DE ACKERMANN: $K = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} -195 & 1 \\ -39 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{(-40)}{156} = [120 \ \ 0]$ //

PARA O SISTEMA #2: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ ; $\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; $\alpha_c(F) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$K = [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [12 \ \ 0] \ //$$

b) $$G_1(s) = \frac{[1 \ \ 1] \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/40 \\ 39/40 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+5)} = \frac{s+1.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$G_2(s) = \frac{[1 \ \ 1] \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+5)} = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

OBS.: O SISTEMA 1 É MENOS CONTROLÁVEL. NOTE QUE O GANHO É MAIOR, PARA COLOCAR OS PÓLOS NAS MESMAS POSIÇÕES QUE O SISTEMA 2. NOTE TAMBÉM A PRESENÇA DO ZERO EM $s = -1.1$ (PRÓXIMO AO PÓLO EM $s=-1$).

OBS.2: $\det \mathcal{C}_1 = -0.0975$ ; $\det \mathcal{C}_2 = 0.25$