EEL760 – Notas de Aula

José Gabriel R. C. Gomes

UFRJ

25-set-2009

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

1. Representação no Espaço de Estados (Revisão)

1.1. FCC (Forma Canônica Controlável)

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = b_1 u^{(m)} + b_2 u^{(m-1)} + \ldots + b_{m+1} u$$

Vamos considerar $m \leq n$

a) Caso particular em que $n = 3$ e $m = 2$:

$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u$

Assumindo condições iniciais nulas ($y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$)

$Y(s)(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) = U(s)(b_1 s^2 + b_2 s + b_3)$

Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Escolha das variáveis de estado

Considere $E(s)$ definido por $\dfrac{E(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$

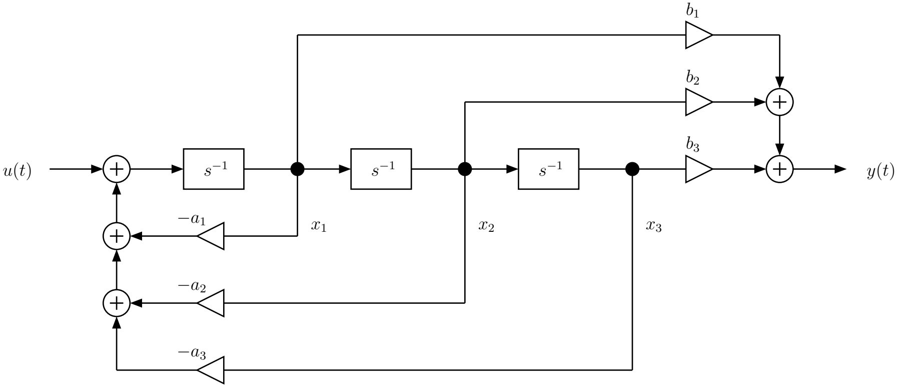
$$\begin{array}{ccccccccc} e''' & + & a_1 e'' & + & a_2 e' & + & a_3 e & = & u \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_3' = x_2 \\ x_2' = x_1 \\ x_1' = u - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Note também que $\dfrac{Y(s)}{E(s)} = b_1 s^2 + b_2 s + b_3$ (pois $\dfrac{Y(s)}{E(s)} . \dfrac{E(s)}{U(s)} = G(s)$)

$$y = b_1 e'' + b_2 e' + b_3 e \Rightarrow y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Blocos



- Todos os estados são realimentados para a entrada (também chamada de *controle*).
- Esta representação é útil para o projeto de controladores.

b) Caso Geral:

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + \ldots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}, \text{ onde } m = n - 1.$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m & b_{m+1} \end{bmatrix} \qquad J_{\mathrm{CC}} = 0 \text{ (assumindo } m < n)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_{\mathrm{CC}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_{\mathrm{CC}}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{H}_{\mathrm{CC}}\mathbf{x}(t) + J_{\mathrm{CC}}u(t)$$

Notação simplificada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\mathrm{CC}}\mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathrm{CC}}u$$
$$y = \mathbf{H}_{\mathrm{CC}}\mathbf{x} + J_{\mathrm{CC}}u \text{ (ou simplesmente } Ju)$$

E se $m = n$?

EXEMPLO #1:

$$G(s) = \frac{2(s+1)(s+4)}{(s+2)(s+3)} = \frac{2s^2+10s+8}{s^2+5s+6}$$

$$\begin{array}{r|l} 2s^2+10s+8 & s^2+5s+6 \\ \cline{2-2} 2s^2+10s+12 & 2 \\ \hline -4 & \end{array}$$

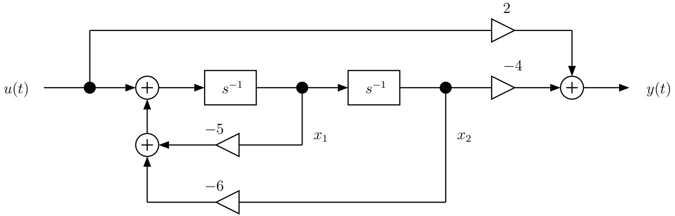
$$G(s) = 2 + \frac{-4}{s^2+5s+6}$$

Então: $Y(s) = -4E(s) + 2U(s)$, onde $E(s) = \dfrac{U(s)}{s^2+5s+6}$

$$\begin{array}{ccccccccc} e'' & + & 5e' & + & 6e & = & u \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & x_1 & & x_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} y & = & -4e & + & 2u \\ & & \downarrow & & \\ & & x_2 & & \end{array}$$

Continuação do Exemplo #1:

$$e'' \quad + \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x_1}}{5e'} \quad + \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x_2}}{6e} \quad = \quad u \qquad\qquad y \quad = \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x_2}}{-4e} \quad + \quad 2u$$



$$\mathbf{F}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad J_{\mathrm{CC}} = 2$$

1.2. FCM (Forma Canônica Modal)

Expansão em frações parciais

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + \ldots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

Associação de blocos em paralelo

$$Y(s) = \underbrace{\frac{A_1}{s - p_1} U(s)}_{X_1(s)} + \ldots + \underbrace{\frac{A_n}{s - p_n} U(s)}_{X_n(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \sum_{i=1}^{n} X_i(s) \qquad \text{(Opção 1)}$$

$$Y(s) = A_1 \underbrace{\frac{U(s)}{s - p_1}}_{X_1(s)} + \ldots + A_n \underbrace{\frac{U(s)}{s - p_n}}_{X_n(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i X_i(s) \qquad \text{(Opção 2)}$$

Há pelo menos duas opções para a escolha das variáveis de estado. É também possível usar combinações destas duas opções.

Notação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\mathrm{cm}}\mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathrm{cm}}u$$
$$y = \mathbf{H}_{\mathrm{cm}}\mathbf{x} + J_{\mathrm{cm}}u \text{ (ou } Ju)$$

EXEMPLO #2:

$$G(s) = 2 + \frac{-4}{s^2+5s+6} = 2 + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_1 = \left.\frac{-4}{s+3}\right|_{s=-2} = -4 \qquad A_2 = \left.\frac{-4}{s+2}\right|_{s=-3} = 4$$

$$G(s) = \frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+3} + 2$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s) \longrightarrow x_1' = -2x_1 + u$$

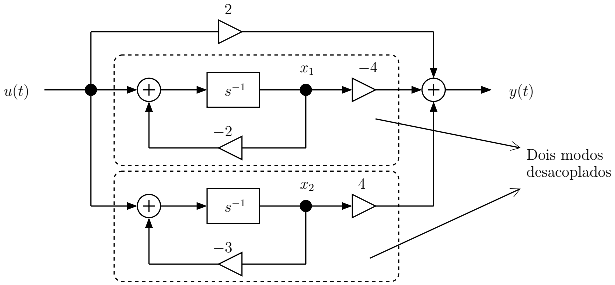
$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s) \longrightarrow x_2' = -3x_2 + u$$

Continuação do EXEMPLO #2:

$$Y(s) = -4X_1(s) + 4X_2(s) + 2U(s) \longrightarrow y(t) = -4x_1(t) + 4x_2(t) + 2u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u$$



Obs.: os pólos múltiplos devem ser agrupados em um só bloco (ver exemplo no site) com modos acoplados, isto é, um bloco envolvendo mais de um integrador. O mesmo deve ser feito com os pólos complexos. Estes casos serão tratados mais frequentemente através da FCC e da FCO.

1.3. Transformação Linear das Variáveis de Estado

$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, $\det(\mathbf{T}) \neq 0$

$\mathbf{x}$: Representação original no espaço de estados

$\mathbf{z}$: Nova representação no espaço de estados

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju \end{array} \quad \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}} \quad \begin{array}{l} \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{z} + Ju \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{z} + Ju \end{array}$$

Então: $$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{\mathrm{Z}}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{\mathrm{Z}}u \\ y = \mathbf{H}_{\mathrm{Z}}\mathbf{z} + J_{\mathrm{Z}}u \end{array} \text{, onde} \quad \begin{array}{l} \mathbf{F}_{\mathrm{Z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} \\ \mathbf{G}_{\mathrm{Z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{Z}} = \mathbf{H}\mathbf{T} \\ J_{\mathrm{Z}} = J \end{array}$$

A notação utilizada será:

$$\boxed{\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} \qquad \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}}$$

EXEMPLO #3: Partição e multiplicação de matrizes em blocos

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -1 \\ \hline -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{I} \qquad \text{(note que } \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\text{)}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = 2 - 1 = 1$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} -2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Autovalores e Autovetores:

$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbf{F}\mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; \mathbf{t}_i \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{t}_i$: i-ésimo autovetor
λ_i: i-ésimo autovalor

$(\mathbf{F} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{t}_i = \mathbf{0}$. Para encontrar λ_i, use: $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{0} \Rightarrow \det(\mathbf{F} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathbf{0}$

Diagonalização: $\begin{array}{l} \mathbf{F}\mathbf{t}_1 = \lambda_1 \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{F}\mathbf{t}_2 = \lambda_2 \mathbf{t}_2 \end{array}$

Então: $\mathbf{F} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \end{array} \right]$

$$\mathbf{F}\mathbf{T} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$$

$\mathbf{F}_{\mathrm{cm}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$, onde as colunas de $\mathbf{T}$ são os autovetores de $\mathbf{F}$.

EXEMPLO #4: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ver Exemplos #1 e #2)

Autovalores: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}| = \begin{vmatrix} \lambda+5 & 6 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$

Autovetores: $(\mathbf{F} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$ $\quad$ $(\mathbf{F} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{t}_2 = \mathbf{0}$

$\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$t_{21} = 1 \Rightarrow t_{11} = -2$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$t_{22} = 1 \Rightarrow t_{12} = -3$

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: note que, para qualquer $\mathbf{T}|\det(\mathbf{T}) \neq 0$, os autovalores de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$ são iguais aos autovalores de $\mathbf{F}$, dados por $|\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}| = 0$:

$$|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\lambda\mathbf{I}\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}||\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{T}| = |\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}|$$

1.4. Transformação Linear para a FCM

$$\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju\end{array} \qquad \xrightarrow{\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{z}} \qquad \begin{array}{l}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{\text{cm}}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{\text{cm}}u \\ y = \mathbf{H}_{\text{cm}}\mathbf{z} + J_{\text{cm}}u\end{array} \; ,$$

onde $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \cdots & \mathbf{t}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ é a matriz dos autovetores $\mathbf{t}_j$ de $\mathbf{F}$:

$(\mathbf{F} - \lambda_j\mathbf{I})\mathbf{t}_j = \mathbf{0}$, $\mathbf{t}_j \neq \mathbf{0}$ e $j = 1, \ldots, n$.

EXEMPLO #5: FCC:
$$\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + 2u\end{array}$$
(do EXEMPLO #1)

$\longrightarrow$ Passar para a FCM.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Continuação do EXEMPLO #5:

$$\mathbf{F}_{\text{cm}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$J_{\text{cm}} = 2$$

Obs.1: compare com o diagrama de blocos do EXEMPLO #2.

Obs.2: nos casos em que há pólos múltiplos, podemos utilizar autovetores generalizados (ver exemplo no site) – por exemplo, $(\mathbf{F} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{v}_j = \mathbf{t}_j$ – para a obtenção e $\mathbf{F}_{\text{cm}}$ na forma de Jordan (e não na forma diagonal).

1.5. Transformação Linear para a FCC

$$\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju\end{array} \qquad \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}} \qquad \begin{array}{l}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{CC}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{CC}u \\ y = \mathbf{H}_{CC}\mathbf{z} + J_{CC}u\end{array}$$

$$\mathbf{F}_{CC} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$$

Considere: $\mathbf{F}_{CC}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}_{CC}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{F}$$

Exemplo de 3ª ordem:

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \mathbf{p}_1 & - \\ - & \mathbf{p}_2 & - \\ - & \mathbf{p}_3 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{p}_1 & - \\ - & \mathbf{p}_2 & - \\ - & \mathbf{p}_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{F} & \\ & & \end{bmatrix}$$

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_3\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3\mathbf{F}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_2\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3\mathbf{F}^2$

Além disso, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{G}_{CC}$:

$$\begin{bmatrix} — & \mathbf{p}_1 & — \\ — & \mathbf{p}_2 & — \\ — & \boxed{\mathbf{p}_3} & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{G} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{p}_3\mathbf{G}} & \mathbf{p}_3\mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{p}_3\mathbf{F}^2\mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\mathbf{y}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{yA} & \mathbf{yB} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{p}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \mathbf{F}^2\mathbf{G} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}$: matriz de *controlabilidade* do sistema $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

$$\boxed{\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}}$$

Em resumo: para converter de $\mathbf{F}$ para $\mathbf{F}_{cc}$ queremos saber $\mathbf{T}^{-1}$ $(= \mathbf{P})$:

1. Calcular $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$;
2. Calcular $\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1}$;
3. Calcular $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n \mathbf{F}^{n-1} \\ \mathbf{p}_n \mathbf{F}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$.

EXEMPLO #6: FCM:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

$\longrightarrow$ Passar para a FCC.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuação do EXEMPLO #6:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{CC}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{\mathrm{CC}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CC}} = \mathbf{H}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathrm{CC}} = J = 2$$

Compare estes resultados com a FCC do EXEMPLO #1.

- $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ descrevem um sistema *controlável* $\Leftrightarrow \det \mathcal{C} \neq 0$.

$$\downarrow$$
$$\exists u(t),\ t \in [t_0, t_\mathrm{f}]\ |\forall \mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_\mathrm{f}) = \mathbf{0}$$

- Assumindo que um sistema $\boxed{\mathbf{F},\ \mathbf{G}}$, $\mathbf{H}$, J é controlável (ou seja, $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$ é não singular) e que $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}_\mathrm{Z}\mathbf{z} + \mathbf{G}_\mathrm{Z} u \\ y &= \mathbf{H}_\mathrm{Z}\mathbf{z} + J_\mathrm{Z} u \end{aligned}$$

Tem-se:

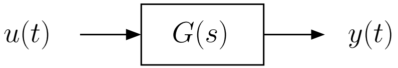
$$\mathcal{C}_\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_z & \mathbf{F}_\mathrm{Z}\mathbf{G}_\mathrm{Z} & \dots & \mathbf{F}_\mathrm{Z}^{n-1}\mathbf{G}_\mathrm{Z} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} & \dots & (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T})^{n-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \qquad \left\{(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right\}$$

$$\mathcal{C}_\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FG} & \dots & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{C}_\mathrm{Z} = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{C}}$$

Portanto, o sistema $\mathbf{F}_\mathrm{Z}$, $\mathbf{G}_\mathrm{Z}$, $\mathbf{H}_\mathrm{Z}$, J_z é controlável também: $\det(\mathcal{C}) \neq 0 \Rightarrow \det(\mathbf{C}_\mathrm{Z}) \neq 0$.



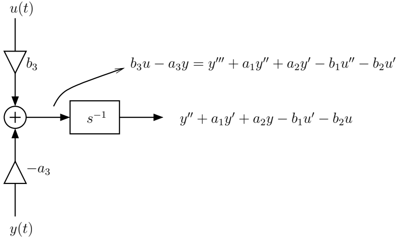
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = b_1 u^{(m)} + b_2 u^{(m-1)} + \ldots + b_{m+1} u$$

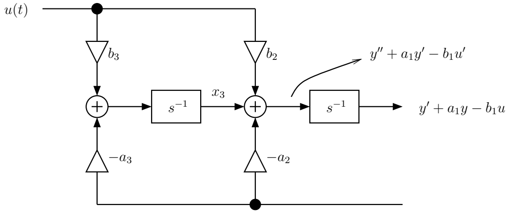
Vamos considerar $m \leq n$

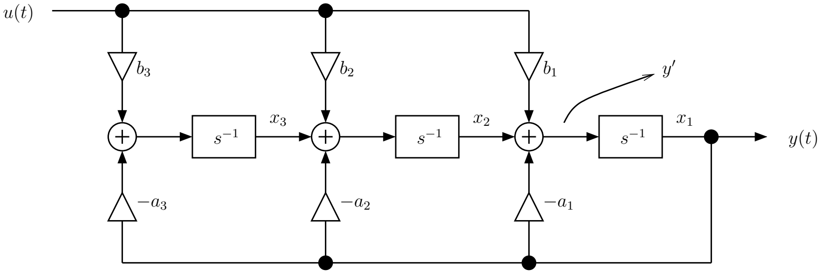
a) Caso particular em que $n = 3$ e $m = 2$:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u$$

Supondo que u e y são conhecidos:







- Todos os *loops* de realimentação usam a saída.
- Dualidade com relação ao diagrama de blocos da FCC.
- Equações de estado:

$$\begin{aligned} x_1' &= -a_1x_1 + x_2 + b_1u \\ x_2' &= -a_2x_1 + x_3 + b_2u \\ x_3' &= -a_3x_1 + b_3u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) Caso Geral:

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + \ldots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}, \text{ onde } m = n - 1.$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_{\text{CO}}\mathbf{x} + \mathbf{G}_{\text{CO}}u \\ y &= \mathbf{H}_{\text{CO}}\mathbf{x} + J_{\text{CO}}u \text{ (ou simplesmente } Ju) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_{\text{CO}} = 0 \text{ (assumindo } m < n)$$

Obs.: note a dualidade existente entre a FCC e a FCO:

FCC	FCO
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}^T$
$\mathbf{G}$	$\mathbf{H}^T$
$\mathbf{H}$	$\mathbf{G}^T$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju\end{aligned} \qquad \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}} \qquad \begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}_{\mathrm{CO}}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{\mathrm{CO}}u \\ y &= \mathbf{H}_{\mathrm{CO}}\mathbf{z} + J_{\mathrm{CO}}u\end{aligned}$$

Considere:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{CO}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{F}_{\mathrm{CO}} = \mathbf{F}\mathbf{T}$$

Exemplo de $3^{\underline{a}}$ ordem:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{F} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

1) $\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{t}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{F}\mathbf{t}_3$

2) $\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{t}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{F}\mathbf{t}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{F}^2\mathbf{t}_3$

Além disso, $\mathbf{HT} = \mathbf{H}_{\text{CO}}$:

$$\begin{bmatrix} - & \mathbf{H} & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \boxed{\mathbf{t}_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{H}\mathbf{t}_3} \\ \mathbf{HF}\mathbf{t}_3 \\ \mathbf{HF}^2\mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \end{bmatrix}} \mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}$: matriz de *observabilidade* do sistema $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$.

$$\boxed{\mathbf{t}_3 = \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Em resumo: para converter de $\mathbf{F}$ para $\mathbf{F}_{co}$ queremos saber $\mathbf{T}$:

1. Calcular $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}$;
2. Calcular $\mathbf{t}_n = \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$;
3. Calcular $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{t}_n & \mathbf{F}^{n-2}\mathbf{t}_n & \ldots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}$.

Observabilidade: $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ descrevem um sistema *observável* $\Leftrightarrow \det(\mathcal{O}) \neq 0$.

$\downarrow$

A equação de estados linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx}$; $y = \mathbf{Hx}$, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$,
é chamada de *observável em* $[t_0, t_\mathrm{f}]$ se o estado inicial
for determinado unicamente por $y(t)$, para $t \in [t_0, t_\mathrm{f}]$.

Ver no website – Lista de Exercícios #1

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

2. Resposta Dinâmica a partir das Equações de Estado

Lembrando que: $\mathcal{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

Temos então: $\mathcal{L}\left[\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}\right]$

$$\begin{aligned}
&s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{F}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}U(s)\\
&s\mathbf{X}(s) - \mathbf{F}\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}U(s) + \mathbf{x}(0)\\
&(s\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}U(s) + \mathbf{x}(0)\\
&\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0)
\end{aligned}$$

mas: $Y(s) = \mathbf{H}\mathbf{X}(s) + JU(s)$,

então: $Y(s) = \underbrace{\mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s) + JU(s)}_{Y_{\mathrm{ZS}}(s)} + \underbrace{\mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{Y_{\mathrm{ZI}}(s)} \longrightarrow \boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]}$

$Y_{\mathrm{ZS}}(s)$: resposta ao estado zero
$Y_{\mathrm{ZI}}(s)$: resposta à entrada zero

$G(s)$ a partir das equações de estado: $G(s) = \left.\dfrac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}}$

$$\boxed{G(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + J}$$

EXEMPLO #7: $G(s) = \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{CO}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{CO}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{CO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_{\mathrm{CO}} = 0$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\mathrm{CO}}) = \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_2 & s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CO}}(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\mathrm{CO}})^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{CO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_2 & s + a_1 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Obs.: A transformação linear $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ não altera $G(s)$.

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} \qquad \mathbf{G}_z = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} \qquad \mathbf{H}_z = \mathbf{H}\mathbf{T} \qquad J_z = J$$

$$G(s) = \mathbf{H}\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}s\mathbf{I}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} + J = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} + J = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + J$$

2.1. Pólos e Zeros a partir das Equações de Estado

Pólos – representam modos p_i naturais do sistema: modos nos quais há resposta $y(t)$ quando $u(t) = 0$ e $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$.

i-ésimo pólo: considere $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}(t) = e^{p_i t}\mathbf{x}_0$.

Substituindo em $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{l} p_i e^{p_i t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{F} e^{p_i t}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{F}\mathbf{x}_0 = p_i \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{F} - p_i \mathbf{I})\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \end{array}$$

Então, os pólos do sistema são os autovalores de $\mathbf{F}$:

$$\boxed{\det(\mathbf{F} - p_i \mathbf{I}) = 0}$$

Equação característica da matriz $\mathbf{F}$: $\boxed{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0}$ ou $\boxed{\alpha(s) = 0}$

Polinômio característico da matriz $\mathbf{F}$: $\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})$

Zeros – modos z_i nos quais $y(t) = 0$ quando $u(t) = u_0 e^{z_i t}$.

Considere $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{z_i t}$. Substituindo $\mathbf{x}(t)$ em $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$:

$$z_i e^{z_i t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\mathbf{x}_0 e^{z_i t} + \mathbf{G} u_0 e^{z_i t}$$

$$\begin{bmatrix} (z_i \mathbf{I} - \mathbf{F}) & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{Eq. (1)}$$

Substituindo em $y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju$:

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_0 e^{z_i t} + J u_0 e^{z_i t} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{Eq. (2)}$$

Concatenando as Equações (1) e (2), temos:

$$\begin{bmatrix} z_i \mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Eq. (3)}$$

Para que a Equação (3) tenha uma solução não-trivial, $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\boxed{\det\left(\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}\right) = 0}$$

Obs.: uma forma alternativa de se calcular $G(s)$ é:

$$\boxed{G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{vmatrix}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{F}|}}$$

EXEMPLO #8:

$$\mathbf{F}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{\text{CO}} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s + a_1 & -1 & -b_1 \\ a_2 & s & -b_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_1 s + b_2 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 s + b_2 = 0 \qquad \text{Ok, ver EXEMPLO \#7.}$$

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

3. Projeto de Controladores (Realimentação de Estados)

Hipótese: $\mathbf{x}(t)$ é conhecido (mais detalhes na Seção 5).

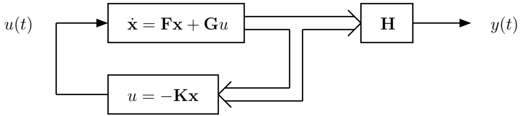
Pólos do sistema realimentado: $\alpha_C(s) = 0$ (mais detalhes na Seção 4).

3.1. Regra de Controle

Fazemos $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, ou seja $u = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Existem n parâmetros livres: $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$.

Sistema em *malha fechada* (mas ainda sem entrada de referência):



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x} \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Equação característica: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}) = 0$

Polinômio característico que desejamos obter (pólos desejados): $\alpha_c(s) = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n) = 0$

Então, basta "casar os coeficientes" na equação: $\boxed{|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}| = (s - p_1)\dots(s - p_n)}$

EXEMPLO #9: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$; $J = 0$

(é a representação de $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 5s + 4}$ na FCM)

Pólos desejados: $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$. $\mathbf{K} =?$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} s + 1 + \dfrac{1}{3}k_1 & \dfrac{1}{3}k_2 \\ \dfrac{-1}{3}k_1 & s + 4 - \dfrac{1}{3}k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= s^2 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}k_1 + 4 - \frac{1}{3}k_2\right)}_{5 + \frac{1}{3}(k_1 - k_2)} s + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}k_1\right)\left(4 - \frac{1}{3}k_2\right) + \frac{k_1 k_2}{9}}_{4 + \frac{1}{3}(4k_1 - k_2)}$$

$\alpha_c(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$

$$\text{Então: } \begin{cases} \dfrac{1}{3}(k_1 - k_2) + 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 \\ \\ 4 + \dfrac{1}{3}(4k_1 - k_2) = 6 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}} \end{cases}$$

EXEMPLO #10: Pêndulo – ver livro-texto p. 380 e p. 381 (segunda edição) ou p. 517 e p. 518 (quarta edição).

Upper Companion Matrix: a primeira linha de $\mathbf{F}_{\mathrm{CC}}$ "acompanha" os coeficientes de $\alpha(s)$. Considere $\alpha(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\mathrm{CC}}|$:

$$n = 2: \begin{vmatrix} s + a_1 & a_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + a_1 s + a_2$$

$$n = 3: \begin{vmatrix} s + a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

$$n = 4: \begin{vmatrix} \boxed{s + a_1} & \boxed{a_2} & \boxed{a_3} & \boxed{a_4} \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix} =$$

$$(s + a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix}}_{s^3} - a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix}}_{-s^2} + a_3 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}}_{s} - a_4 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-1}$$

n qualquer:

$$\begin{vmatrix} s + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -1 & s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s \end{vmatrix}$$

s^{n-1}

$-s^{n-2}$

3.2. Regra de Controle a partir da FCC

Para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{CC}\mathbf{x} + \mathbf{G}_{CC}u$ em malha fechada (com $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$):

$$\mathbf{F}_{CC} - \mathbf{G}_{CC}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \ldots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica $|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{CC} + \mathbf{G}_{CC}\mathbf{K}|$ é: $s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + \ldots + a_n + k_n = 0$

O polinômio característico desejado é:

$$\alpha_C(s) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Comparando os coeficientes, temos: $\boxed{k_i = \alpha_i - a_i,\ i = 1, \ldots, n.}$

EXEMPLO #11: $G(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+4}$. Pólos desejados: $\alpha_c(s) = s^2+5s+6$.

Considerando a planta $G(s)$ representada na FCC, temos:

$$\begin{array}{l} k_1 = 5-5 = 0 \\ k_2 = 6-4 = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_{cc} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \end{array}\right]} \quad \left(|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{cc} + \mathbf{G}_{cc}\mathbf{K}_{cc}| = \left|\begin{array}{cc} s+5+k_1 & 4+k_2 \\ -1 & s \end{array}\right| \right)$$

No EXEMPLO #9, tínhamos obtido $\mathbf{K}_{cm} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array}\right]$.

K depende da representação no espaço de estados.

No EXEMPLO #9: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{cm}\mathbf{x} + \mathbf{G}_{cm}u$.
No EXEMPLO #11: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{cc}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{cc}u$, onde $\mathbf{F}_{cc} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}_{cm}\mathbf{T}$. $\mathbf{T} = ?$

Cálculo de **T**:

$$\mathcal{C}_{cm} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{cm} & \mathbf{F}_{cm}\mathbf{G}_{cm} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_{cm}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{p}_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\mathcal{C}_{cm}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{F}_{cm} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{array}\right]$$

O controlador projetado no EXEMPLO #11 foi $u = -\mathbf{K}_{\text{CC}}\mathbf{z}$, mas $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$.

Então:

$$u = -\mathbf{K}_{\text{CC}}\mathbf{P}\mathbf{x}$$

$$u = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$u = -\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{cm}} \text{ conforme calculado no EXEMPLO \#9.}} \mathbf{x}$$

Conclusão:

Dados:

- Representação em forma qualquer: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju \end{cases}$
- Pólos desejados, representados por $\alpha_{\text{C}}(s)$

Executar os seguintes passos:

1. Transformar $\mathbf{F}$ para $\mathbf{F}_{\text{CC}}$ usando $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$
2. Obter $\mathbf{K}_{\text{CC}}$ por inspeção ($k_i = \alpha_i - a_i$)
3. Transformar $\mathbf{K}_{\text{CC}}$ de volta para a representação original: $\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{CC}}\mathbf{P}}$

3.3. Fórmula de Ackermann (para o posicionamento dos pólos)

Resume os passos 1, 2 e 3 do slide anterior, facilitando o cálculo de **K**.

Dados: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju \\ \alpha_C(s) \end{cases}$

Faz-se $\boxed{\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_C(\mathbf{F})}$,

onde $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$ e $\alpha_C(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n + \alpha_1 \mathbf{F}^{n-1} + \alpha_2 \mathbf{F}^{n-2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{I}$

EXEMPLO #12: $\mathbf{F}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

$\alpha_C(s) = s^2 + 5s + 6$ $\mathbf{K}_{\text{cm}} = ?$ (repetição do EXEMPLO #9)

$\mathcal{C}_{\text{cm}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Continuação do Exemplo #12:

$$\alpha_c(\mathbf{F}_{cm}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^2 + 5\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Então: $\mathbf{K}_{cm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_{cm} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}}$

Observações

1) Se $\det(\mathcal{C}) \neq 0$, então é possível $(\exists \mathbf{T}|)$ $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}_{cc}$ (usando $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$). Portanto, é possível colocar os pólos do sistema (em malha fechada) em qualquer posição desejável. A planta é controlável.

2) Planta não-controlável ($\det(\mathcal{C}) = 0$): pelo menos um dos modos naturais da planta não está acoplado à entrada da mesma.

3) Baixa controlabilidade $\Rightarrow$ ganhos k_i altos

4) Mover pólos para posições finais (em malha fechada) distantes das posições originais (em malha aberta) $\Rightarrow$ ganhos k_i altos

5) Cálculo de $\mathbf{K}$ no MATLAB:

```
>> F = [-1 0 ; 0 -4]; G = [1/3 ; -1/3];

>> p = [-2 -3]

>> K = acker(F,G,p);
```

ou `>> K = place(F,G,p);`

Primeira idéia seria: $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)$

Então: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{G}r \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{cases}$ e $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}$

EXEMPLO #13: $\mathbf{F}_{\mathrm{cm}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_{\mathrm{cm}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_{\mathrm{cm}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{K}_{\mathrm{cm}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Temos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s + \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & s + \frac{10}{3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Continuação do EXEMPLO #13:

Resposta ao degrau: $Y(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}$

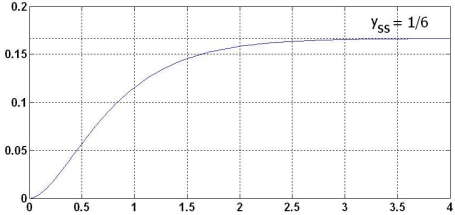
Note que $\underbrace{\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)}$ $= \dfrac{1}{6}$

$$\left(sY(s) - y(0)^- = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(\tau)}{d\tau} e^{-s\tau} d\tau \right) \text{ (Oppenheim + Willsky)}$$

Ganho DC: $\displaystyle \lim_{s \to \infty} \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\bar{N}}$

Simulação no MATLAB:

```
>> sys = ss((1/3)*[-5 -2 ; 2 -10],[1/3 ; -1/3],[1 1],0);
>> step(sys);
```



Análise em Estado Estacionário:

1. $r_{\text{SS}} = \lim_{t \to \infty} r(t)$
2. $\mathbf{x}_{\text{SS}} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t)$
3. $y_{\text{SS}} = \lim_{t \to \infty} y(t)$
4. $u_{\text{SS}} = \lim_{t \to \infty} u(t)$
5. $\lim_{t \to \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$

Podemos escrever $\mathbf{x}_{\text{SS}}$, y_{SS} e u_{SS} em função de r_{SS}:

$$\mathbf{x}_{\text{SS}} = \mathbf{N}_{\text{X}} r_{\text{SS}} \ (\mathbf{N}_{\text{X}} \text{ vetor } n \times 1)$$

$$y_{\text{SS}} = r_{\text{SS}} \ (\text{ganho DC unitário})$$

$$u_{\text{SS}} = N_{\text{u}} r_{\text{SS}} \ (N_{\text{u}} \text{ escalar})$$

Então:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{\mathrm{ss}} + \mathbf{G}u_{\mathrm{ss}} \\ y_{\mathrm{ss}} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{\mathrm{ss}} + Ju_{\mathrm{ss}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{F}\mathbf{N}_{\mathrm{x}}r_{\mathrm{ss}} + \mathbf{G}N_{\mathrm{u}}r_{\mathrm{ss}} \\ r_{\mathrm{ss}} = \mathbf{H}\mathbf{N}_{\mathrm{x}}r_{\mathrm{ss}} + JN_{\mathrm{u}}r_{\mathrm{ss}} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathrm{x}} \\ N_{\mathrm{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

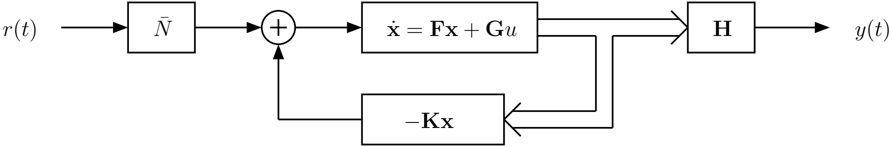
$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathrm{x}} \\ N_{\mathrm{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Para obter ganho DC $= 1$, definimos $u(t)$ da seguinte forma:

$$u(t) = N_{\mathrm{u}}r(t) - \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{N}_{\mathrm{x}}r(t)) \qquad \left(\text{note que } \lim_{t\to\infty} u(t) = N_{\mathrm{u}}r_{\mathrm{ss}}\right).$$

Portanto: $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (N_{\mathrm{u}} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{\mathrm{x}})r$

Logo: $\boxed{u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \bar{N}r}$, onde $\boxed{\bar{N} = N_{\mathrm{u}} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{\mathrm{x}}}$



Ou simplesmente: $\boxed{\bar{N} = \dfrac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{Y(s)}{R(s)}}}$

Então: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{G}\bar{N}r \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{cases}$

EXEMPLO #14: (continuando o EXEMPLO #13)

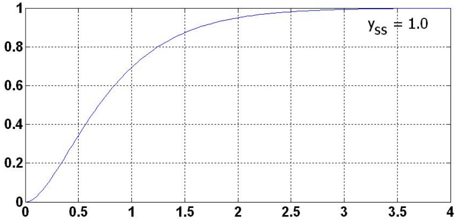
$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathrm{x}} \\ N_{\mathrm{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -4 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = N_{\mathrm{u}} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{\mathrm{x}} = 4 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = 6$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

Simulação no MATLAB:

```
>> sys = ss((1/3)*[-5 -2 ; 2 -10],[6/3 ; -6/3],[1 1],0);
>> step(sys);
```



Obs.: os zeros da função de transferência são os mesmos para:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{c} \text{malha} \\ \text{aberta} \end{array} \right) \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{G}\bar{N}r \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{c} \text{malha} \\ \text{fechada} \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{cc} a & nb \\ c & nd \end{array} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{cc} a + nb & b \\ c + nd & d \end{array} \right| = 0$$

Então:

$$\left[\begin{array}{cc} s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}) & -\bar{N}\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & 0 \end{array} \right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc} s\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}) & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & 0 \end{array} \right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc} s\mathbf{I} - \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{H} & 0 \end{array} \right]$$

$$= 0 \qquad\qquad = 0 \qquad\qquad = 0$$

Ver no website – Lista de Exercícios #2

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

4. Escolha das Posições dos Pólos em Malha Fechada

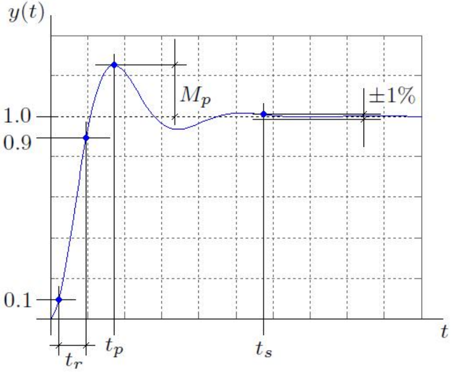
Dois métodos para a seleção dos pólos:

1. Pólos de Segunda Ordem Dominantes

2. Root Locus Simétrico (SRL) – MATLAB

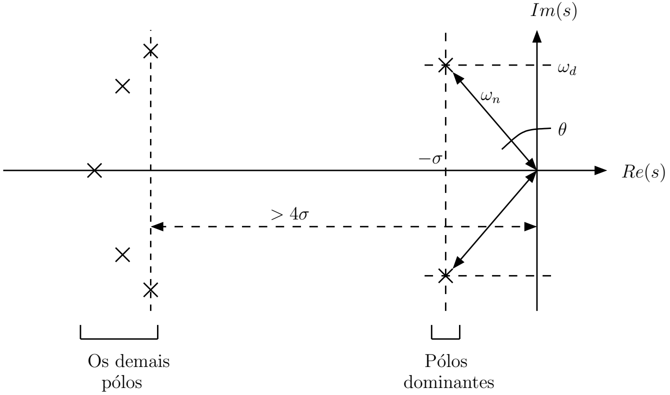
4.1. Método dos Pólos de Segunda Ordem Dominantes

Especificações (da resposta ao degrau):



Sigla	Nome	Exemplo
t_r	tempo de subida (*rise-time*)	1.5 ms
t_p	tempo de pico (*peak-time*)	6.3 ms
M_p	*overshoot*	5%
t_s	tempo de estabelecimento (*settling-time*)	9.2 ms

Idéia: considerar somente os dois pólos complexos mais próximos do eixo imaginário. Posicionar os demais pólos suficientemente "à esquerda" para que a sua influência seja desprezível.



- Método simples para n pólos;
- Pode exigir ganhos maiores do que o necessário.

4.1.1. Dois Pólos Complexos:

$s = -\sigma \pm j\omega_d$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{Eq. (1)}$$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_d^2 + \sigma^2} \qquad \text{Eq. (2)}$$

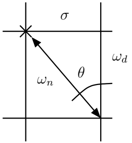
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)}$$

Comparando os coeficientes dos denominadores nas Equações (1) e (2):

$$\sigma = \xi\omega_n$$

σ: constante de decaimento
ξ: amortecimento
ω_n: frequência natural (sem amortecimento)



$\theta = \arcsin \xi$

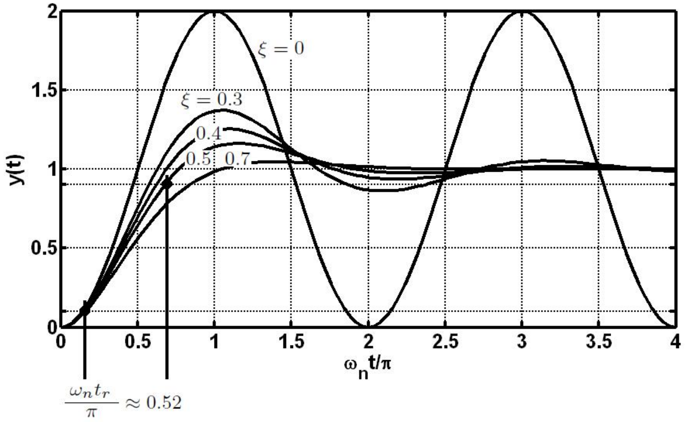
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, onde ω_d: frequência amortecida

Resposta ao impulso: $\left\{ \quad e^{-at}\sin(bt)u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \dfrac{b}{(s+a)^2+b^2} \quad \right\}$

$$H(s) = \frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2} \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \qquad h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t)u(t)$$

Resposta ao degrau:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \quad d\tau \qquad \longrightarrow \qquad y(t) = \left[1 - e^{-\sigma t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right)\right] u(t)$$



1. $t_r \approx \dfrac{1.8}{\omega_n} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_n > \dfrac{1.8}{t_r}}$

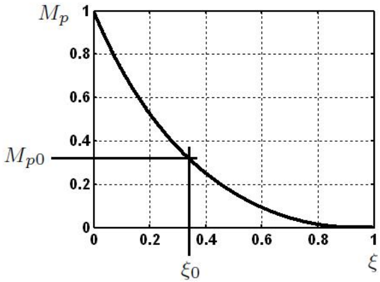
2. A partir de $h(t)$: $\quad t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_d > \dfrac{\pi}{t_p}}$

Obs.: para gerar o gráfico comparativo do slide anterior, use:

```
>> num = 100; den = [1 0 100];
>> sys = tf(num,den); [y,t]=step(sys,4*pi/10);
>> plot(10*t/pi,y); hold on;
>> num = 100; den = [1 6 100];
>> sys = tf(num,den); [y,t]=step(sys,4*pi/10);
>> plot(10*t/pi,y); hold on;
>> num = 100; den = [1 8 100];
>> sys = tf(num,den); [y,t]=step(sys,4*pi/10);
>> plot(10*t/pi,y); hold on;
>> num = 100; den = [1 10 100];
>> sys = tf(num,den); [y,t]=step(sys,4*pi/10);
>> plot(10*t/pi,y); hold on;
>> num = 100; den = [1 14 100];
>> sys = tf(num,den); [y,t]=step(sys,4*pi/10);
>> plot(10*t/pi,y); hold on;
>> grid on; axis([0 4 0 2]);
```

3. A partir de $y(t)$:

$$M_p = e^{-\dfrac{\sigma\pi}{\omega_d}} = e^{-\dfrac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



ξ	M_P
0.3	0.35
0.4	0.25
0.5	0.16
0.7	0.05

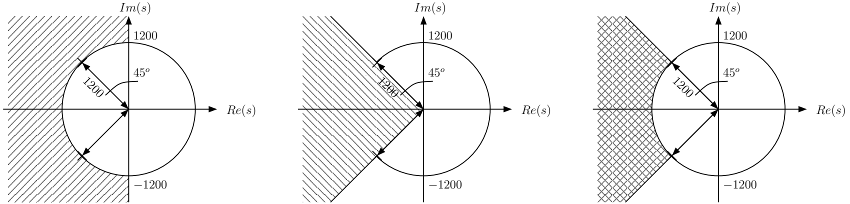
Escolher $\xi > \xi_0$

4. A partir de $y(t)$: $\quad e^{-\sigma t_s} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \sigma t_s = 4.6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma > \dfrac{4.6}{t_s}}$

EXEMPLO #15: $t_r < 1.5$ ms $\Rightarrow \omega_n > \dfrac{1.8}{1.5} \times 10^3 = 1200$ rad/seg.

$M_P < 5\% \Rightarrow \xi > 0.7$

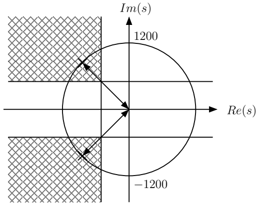
Então $s = -850 \pm 850j$



Obs.: especificações não-utilizadas:

$t_p < 6.3$ ms $\longrightarrow \omega_d > 500$ rad/seg

$t_s < 9.2$ ms $\longrightarrow \sigma > 500$ seg^{-1}



Obs.: para sistema de ordem 1: $y(t) = (1 - e^{-\sigma t})u(t)$

$$\boxed{\sigma > \frac{4.6}{t_s}} \qquad \boxed{\sigma > \frac{2.2}{t_r}} \qquad (\ln 0.9 - \ln 0.1 = 2.2)$$

4.1.2. Dois Pólos Complexos + Um Zero Real:

Pólos: $s = -\sigma \pm j\omega_d$

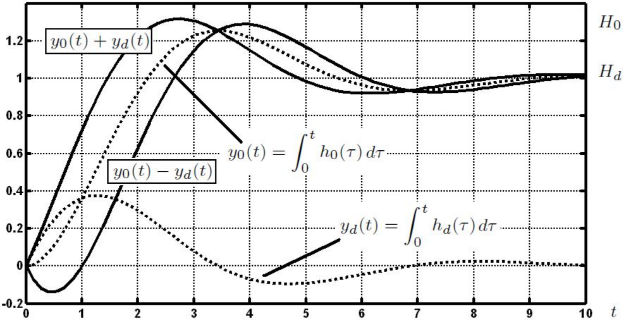
Zero: $s = -\alpha\sigma$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 \left(\dfrac{s}{\alpha\sigma} + 1 \right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Considerando $\omega_n = 1$ (ou seja $\sigma = \xi\omega_n = \xi$, para simplificar cálculo da resposta ao degrau):

$$H(s) = \frac{\dfrac{s}{\alpha\xi} + 1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}}_{\substack{\text{Resposta ao impulso}\\ \text{do sistema com dois pólos}\\ \text{complexos (4.1.1), } h_0(t)}} + \frac{1}{\alpha\xi} \cdot \underbrace{\frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}}_{\substack{\text{Derivada da}\\ \text{resposta ao}\\ \text{impulso, } h_d(t)}}$$



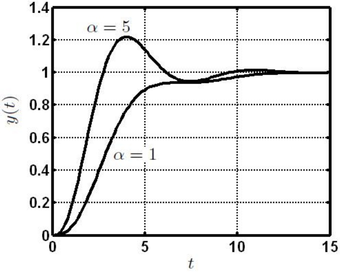
$$H_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

$$H_d(s) = \frac{0.625s}{s^2 + 0.8s + 1} \quad (\alpha = 4)$$

$$\text{Efeitos:} \quad \begin{cases} \text{Se } |\alpha| > 4\text{: desprezível;} \\ \text{Se } 0 < \alpha < 4\text{: } t_r \text{ diminui; } M_p \text{ aumenta;} \\ \text{Se } -4 < \alpha < 0 \text{ (zero no semiplano lateral direito): resposta} \\ \text{começa “na direção contrária”.} \end{cases}$$

4.1.3. Dois Pólos Complexos + Um Pólo Real:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha\sigma} + 1\right)\left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1\right)}$$



Efeitos: $\begin{cases} \text{Se } \alpha > 4\text{: desprezível;} \\ \text{Se } 0 < \alpha < 4\text{: } t_r \text{ aumenta.} \end{cases}$

Obs.: na figura acima, para $\alpha = 5$:

$$H(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)\left(s^2 + 0.8s + 1\right)}$$

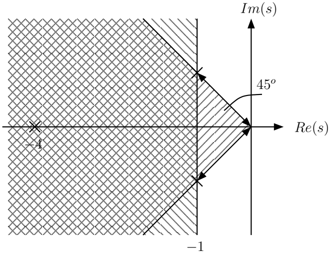
EXEMPLO #16:

$M_p < 0.05 \longrightarrow \xi > 0.7$

$t_s < 4.6$ seg $\longrightarrow \sigma > \dfrac{4.6}{4.6} = 1$

Considerar sistema com três pólos.

$$\text{Então: } \begin{cases} s = -1 \pm j \text{ (pólos dominantes)} \\ s = -4 \text{ (usando } \alpha = -4) \\ \alpha_c(s) = (s+1+j)(s+1-j)(s+4) \\ \alpha_c(s) = (s^2+2s+2)(s+4) \\ \boxed{\alpha_c(s) = s^3 + 6s^2 + 10s + 8} \end{cases}$$



Obs.: simulação no MATLAB:

```
>> sys = tf(8,[1 6 10 8]);

>> step(sys); grid on;
```

Ver no website – Lista de Exercícios #3

Regulador Quadrático Linear (LQR) – Controle Ótimo

Dado: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{cases}$

Escolher $\mathbf{K}$ tal que $J = \displaystyle\int_0^{\infty} (\rho y^2(t) + u^2(t))dt$ seja mínimo (com $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$).

Solução: $\mathbf{K}$ tal que os pólos fiquem sobre o *root locus simétrico* (SRL):

$$1 + \rho G(s)G(-s) = 0, \text{ onde } G(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}.$$

EXEMPLO #17: Se $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$:

$$1 + \rho.\frac{1}{s+a}.\frac{1}{-s+a} = 0$$

$$-s^2 + a^2 = -\rho$$

$$s = -\sqrt{a^2 + \rho}$$

Projeto de um LQR no MATLAB (Forma Mais Geral):

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

Vetor **u**: representa múltiplas possíveis entradas.

Então:

```
>> K = lqr(F,G,Q,R);
```

Muitas escolhas são possíveis para **Q** e **R**:

Exemplo:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Q} = \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ \\ \mathbf{R} = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty (\rho y^2 + u^2) dt$$

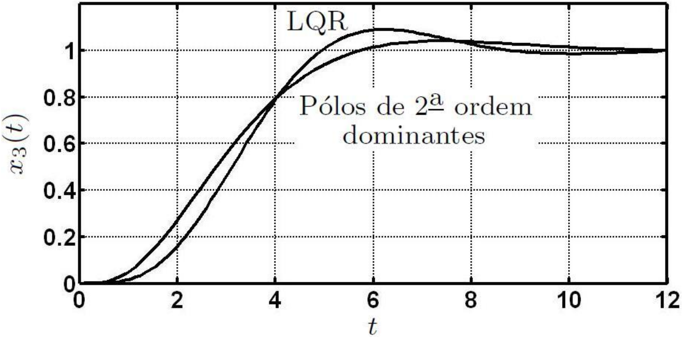
Exemplo:

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\max(x_i)} \right\}$$

$$\mathbf{R} = \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\max(u_i)} \right\} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{\max(u)}$$

EXEMPLO #18: Ver exemplo no livro (quarta edição, páginas 530, 531, 538 e 539 - estão disponíveis no site).

"Tape-drive" (planta com cinco pólos):



Projeto LQR obtém vetor **K** com valores bem menores.

Obs.: o valor de ρ deve ser ajustado pelo projetista, para obter o objetivo desejado. Os casos-limite são:

$$\rho = 0 \text{ (controle caro)}$$

$$\rho \longrightarrow \infty \text{ (controle barato)}$$

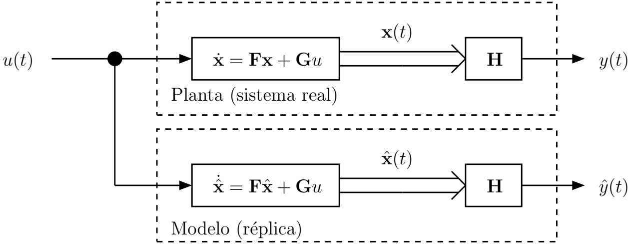
Obs.: o gráfico comparativo do slide anterior foi gerado com os comandos a seguir:

```
>> clear all;

>> % Polos Dominantes

>> F = [0 2 0 0 0 ; -.1 -.35 .1 .1 .75 ; 0 0 0 2 0 ; .4 .4 -.4 -1.4 0; 0 -.03 0 0 -1];

>> G = [0;0;0;0;1]; pc = [-.707+.707*j ; -.707-.707*j ; -4 ; -4 ; -4]/1.5;

>> Kclassico = acker(F,G,pc)

>> Fclassico = F-G*Kclassico; H = [0 0 1 0 0];

>> N = inv([ [F G] ; [H 0] ])*[0;0;0;0;0;1]

>> Nx=N(1:5); Nu=N(6); Nbar=Nu+Kclassico*Nx;

>> [nclassico,dclassico]=ss2tf(Fclassico,Nbar*G,H,0); sysclassico=tf(nclassico,dclassico);

>> roots(dclassico)*1.5

>> [y,t]=step(sysclassico); plot(t,y);

>> % LQR

>> H3 = [.5 0 .5 0 0]; R = 1; rho = 1; Q = rho*H3'*H3;

>> Klqr = lqr(F,G,Q,R)

>> Nbar=Nu+Klqr*Nx; Flqr = F-G*Klqr; [nlqr,dlqr]=ss2tf(Flqr,Nbar*G,H,0); syslqr=tf(nlqr,dlqr);

>> [y,t]=step(syslqr); hold on; plot(t,y); axis([0 12 0 1.2]); grid on;
```

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

5. Projeto de Estimadores de Estado (Observadores)

- Por causa do custo dos sensores, $\mathbf{x}(t)$ não está disponível.
- Usar uma estimativa, $\hat{\mathbf{x}}(t)$.



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u$$

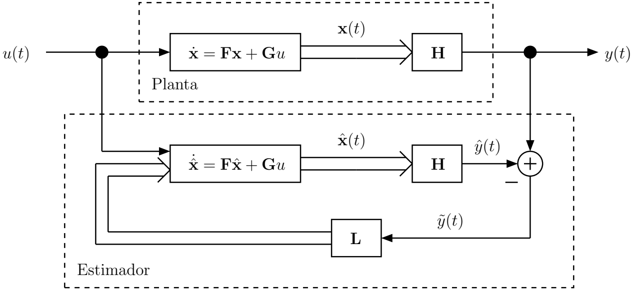
Erro da estimativa:
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}u \\ &\boxed{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}}, \text{ sendo } \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0). \end{aligned}$$

Se todos os autovalores de $\mathbf{F}$ tiverem parte real negativa: $\lim_{t \longrightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = 0$.

Problemas:

1. A convergência de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ para zero é lenta (ocorre segundo os pólos de $G(s)$).
2. Pequenas discrepâncias entre $\mathbf{F}$ da planta e do modelo podem fazer com que o erro de estimação seja alto.

Para resolver estes problemas:



O estimador é definido por: $\boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad \text{(vetor coluna)}$$

$$\begin{array}{lr} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u & \text{Eq. (1)} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) & \text{Eq. (2)} \\ \hline \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}} & \text{Eq. (1)} - \text{Eq. (2)} \end{array}$$

Então: $\boxed{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\tilde{\mathbf{x}}}$

Equação característica do erro de estimação: $\boxed{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}) = 0}$

Pólos desejados: $\alpha_e(s) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) = 0$.

Então, **L** pode ser encontrado através da comparação dos coeficientes em:

$$\boxed{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

Obs.1: Planta = sistema físico qualquer
Estimador = sistema eletrônico (contínuo ou discreto)

Obs.2: Pólos do erro de estimação (raízes de $\alpha_e(s)$): devem ser muito mais "rápidos" ($\sigma_e > 10\sigma_c$) do que os pólos do controle.

$$
\text{Obs.:}\ \left\{\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} s+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & s & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{vmatrix} = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n \\
\\
\text{Note que } \det(A^T) = \det(A)
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \end{array}
\quad \xrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}} \quad
\begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{\text{CO}}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{\text{CO}}u \\ y = \mathbf{H}_{\text{CO}}\mathbf{z} \end{array}
$$

Para o sistema $\begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{\text{CO}}\mathbf{z} + \mathbf{G}_{\text{CO}}u \\ y = \mathbf{H}_{\text{CO}}\mathbf{z} \end{array}$, temos $\mathbf{F}_{\text{CO}} - \mathbf{L}\mathbf{H}_{\text{CO}} =$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 - l_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_3 - l_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n - l_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(“\textit{Left Companion Matrix}”)}$$

Então: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{CO}} + \mathbf{L}\mathbf{H}_{\text{CO}}) = s^n + (a_1 + l_1)s^{n-1} + (a_2 + l_2)s^{n-2} + \ldots + a_n + l_n$

O polinômio característico desejado é:

$$\alpha_e(s) = (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

Comparando os coeficientes, temos: $\boxed{l_i = \alpha_i - a_i,\ i = 1, \ldots, n}$

Na FCO, o vetor $\mathbf{L}$ pode ser obtido facilmente através da comparação entre os coeficientes de $\alpha_e(s)$ e do denominador de $G(s)$.

Obs.1: $\mathbf{T}$ existe se e somente se $|\mathcal{O}| \neq 0$, sendo $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz de observabilidade do sistema original.

Obs.2: Mudança de coordenadas de volta para a representação original:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}_{\mathrm{CO}}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{G}_{\mathrm{CO}}u + \mathbf{L}_{\mathrm{CO}}(y - \mathbf{H}_{\mathrm{CO}}\hat{\mathbf{z}})$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}:$$

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}_{\mathrm{CO}}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{\mathrm{CO}}u + \mathbf{L}_{\mathrm{CO}}(y - \mathbf{H}_{\mathrm{CO}}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}\mathbf{F}_{\mathrm{CO}}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{G}_{\mathrm{CO}}u + \underline{\mathbf{T}\mathbf{L}_{\mathrm{CO}}}(y - \mathbf{H}_{\mathrm{CO}}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}})$$

Na forma original:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \underline{\mathbf{L}}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})$$

Então:

$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{T}\mathbf{L}_{\mathrm{CO}}}$ (ver Lista de Exercícios #4, Exercício #5b).

5.3. Fórmula de Ackermann para o Estimador

Dados: $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} \\ \alpha_e(s) \end{cases}$$

Faz-se
$$\boxed{\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

onde:

$$\alpha_e(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n + \alpha_1\mathbf{F}^{n-1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{I} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO # 19: Projetar um estimador de estados para o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

De forma tal que os pólos do erro de estimação estejam em $-40 \pm 40j$ (ver Lista de Exercícios #4, Exercício # 5c).

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{O} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_e(s) = (s + 40 + 40j)(s + 40 - 40j) = s^2 + 80s + 3200$$

$$\alpha_e(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -80 & 0 \\ 0 & -320 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3200 & 0 \\ 0 & 3200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3121 & 0 \\ 0 & 2896 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3121 & 0 \\ 0 & 2896 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1040.33 \\ -965.33 \end{bmatrix}$$

5.4. Dualidade

Projeto do Controlador ($\alpha_c(s)$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$
$$y = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\underbrace{\mathbf{K}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vetor-linha}}}| = 0$$

MATLAB: `>> K = acker(F,G,Pc);`

Projeto do Estimador ($\alpha_e(s)$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$
$$y = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \underbrace{\mathbf{L}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vetor-coluna}}}\mathbf{H}| = 0$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F}^T + \mathbf{H}^T\underbrace{\mathbf{L}^T}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vetor-linha}}}| = 0 \quad (\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T))$$

MATLAB: `L = (acker(F',H',Pe))';`

Se y for uma variável de estado ($y = x_a$), sobram $n-1$ estados a serem estimados $\longrightarrow$ estimador mais simples.

Estimador de ordem $n-1$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} F_{aa} & \mathbf{F}_{ab} \\ \hline \mathbf{F}_{ba} & \mathbf{F}_{bb} \end{array}\right]}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{c} G_a \\ \hline \mathbf{G}_b \end{array}\right]}_{\mathbf{G}} u$$

$$y = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

Note que $\mathbf{H}$ deve estar no formato $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Obs.: $\mathbf{F}$: $\left[\begin{array}{c|c} 1 \times 1 & 1 \times (n-1) \\ \hline (n-1) \times 1 & (n-1) \times (n-1) \end{array}\right]$

Então: $\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{F}_{bb}\mathbf{x}_b + \underbrace{\mathbf{F}_{ba}\overbrace{x_a}^{y} + \mathbf{G}_b u}_{\text{“Entrada” conhecida – “novo } \mathbf{G}u\text{”}}$

E também:

$$\dot{x}_a = F_{aa}x_a + \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b + G_a u$$

$$\dot{y} = F_{aa}y + \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b + G_a u$$

$$\underbrace{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u}_{\text{“Saída” conhecida: “novo } y\text{”}} = \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b$$

Podemos considerar que se trata de uma “nova planta”:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_b = \boxed{\mathbf{F}_{bb}}\mathbf{x}_b + \boxed{\mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_b u} & & \dot{\mathbf{x}} = \boxed{\mathbf{F}}\mathbf{x} + \boxed{\mathbf{G}u} \\ & \longleftrightarrow & \\ \boxed{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u} = \boxed{\mathbf{F}_{ab}}\mathbf{x}_b & & \boxed{y} = \boxed{\mathbf{H}}\mathbf{x} \end{array}$$

$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}_{bb}$
$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_b$
$\mathbf{G}u \longrightarrow \mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_b u$
$y \longrightarrow \dot{y} - F_{aa}y - G_a u$
$\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{F}_{ab}$

Para estimar $\mathbf{x}_b$, usa-se a mesma equação que havia sido usada para a estimação de $\mathbf{x}$:

$$\boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}}} = \boxed{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{G}u} + \mathbf{L}\left(\boxed{y} - \boxed{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}\right)$$

$$\boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b} = \boxed{\mathbf{F}_{bb}}\hat{\mathbf{x}}_b + \boxed{\mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_b u} + \mathbf{L}\left(\underset{= \mathbf{F}_{ab}\mathbf{x}_b}{\boxed{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u}} - \boxed{\mathbf{F}_{ab}}\hat{\mathbf{x}}_b\right) \qquad \text{(Eq. (1))}$$

$-$

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{F}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{F}_{ba}y + \mathbf{G}_b u \qquad \text{(Eq. (2))}$$

A Equação (1) é a mesma equação do estimador de estados de ordem reduzida. Subtraindo-se Equação (2) $-$ Equação (1), temos o erro de estimação dado por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})\,\tilde{\mathbf{x}}_b$$

Pode-se calcular $\mathbf{L}$ do estimador de ordem reduzida através da comparação dos coeficientes em:

$$\boxed{|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{bb} + \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab}| = 0} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\alpha_e(s) = 0}$$

No MATLAB: `L = (acker(Fbb',Fab',Pe))';`

Implementação do Estimador de Estados de Ordem Reduzida:

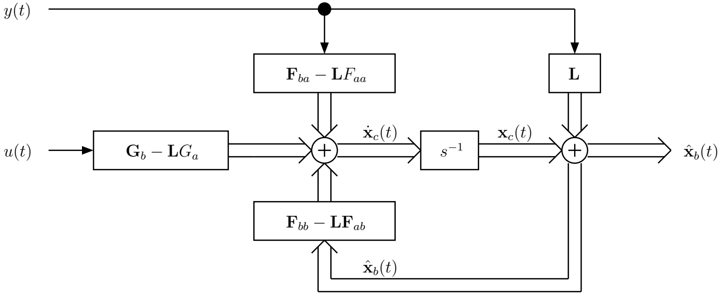
Reescrevendo a equação do estimador de estados de ordem reduzida (Eq. (1) do slide anterior):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)u + \boxed{\mathbf{L}\dot{y}} \longleftarrow \boxed{\text{Como obter a derivada de } y(t)\text{?}}$$

$$\underbrace{\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b - \mathbf{L}\dot{y}} = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)u$$

Criando um novo vetor de estados $\mathbf{x}_c = \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{L}y$:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)u$$



EXEMPLO #20: Projetar e implementar um estimador de estados de ordem reduzida para o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

De forma tal que o pólo do erro de estimação esteja em $s = -40$

Para que $\mathbf{H}_z$ fique na forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$: $\quad \mathbf{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\displaystyle \mathbf{H} \atop \downarrow}{\boxed{1 \quad 1}} \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Continuação do EXEMPLO #20:

$$\dot{\mathbf{z}} = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -3 \\ \hline 0 & -4 \end{array}\right]\mathbf{z} + \left[\begin{array}{r} 0 \\ -1/3 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]\mathbf{z}$$

$$F_{zaa} = -1 \qquad \mathbf{F}_{zab} = -3 \qquad G_{za} = 0$$

$$\mathbf{F}_{zba} = 0 \qquad \mathbf{F}_{zbb} = -4 \qquad \mathbf{G}_{zb} = -1/3$$

$$\mathbf{H}_z = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]$$

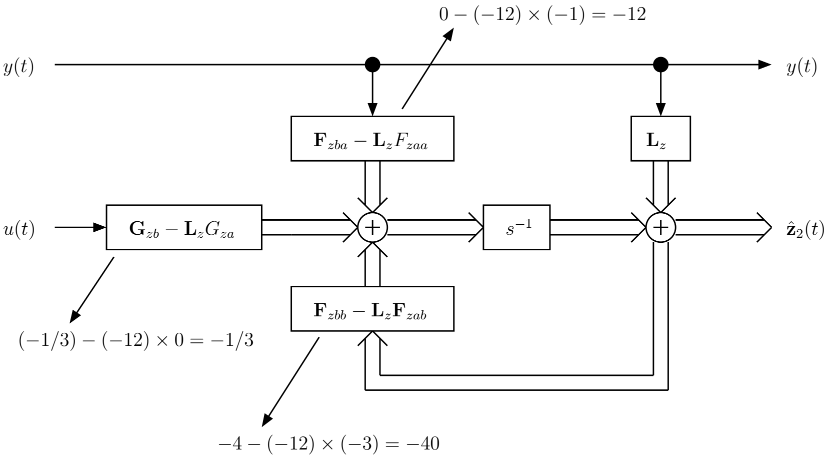
$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = y = z_a & \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_b = (\mathbf{F}_{zbb} - \mathbf{L}_z\mathbf{F}_{zab})\,\tilde{\mathbf{z}}_b \\ z_2 = \mathbf{z}_b & \end{array}\right\}$$

$|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{zbb} + \mathbf{L}_z\mathbf{F}_{zab}| = 0 \qquad$ e $\qquad \alpha_e(s) = s + 40 = 0$

Então: $s + 4 - 3\mathbf{L}_z = s + 40 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{L}_z = -12.$

Continuação do EXEMPLO #20:

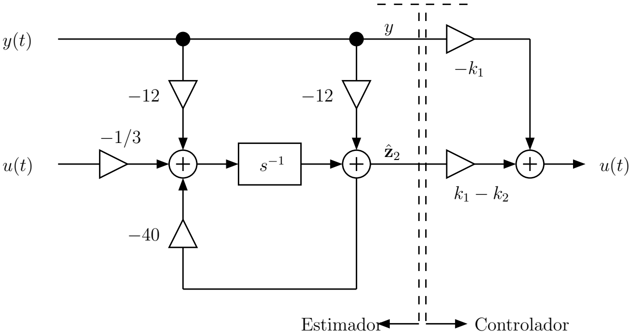
Implementação:



Continuação do EXEMPLO #20:

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}$$

Calculando o sinal de controle:
$$u = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 - k_1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}$$



Considere o controlador, por exemplo, no caso $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ do EXEMPLO #9.

5.6. Escolha dos Pólos do Estimador

Método dos pólos dominantes:

- Normalmente, estimador 2 a 10 vezes mais rápido que o controlador ($\sigma_e > 10\sigma_c$);
- Compromisso: velocidade de estimação $\times$ ruído.

Método SRL:

- $G_e(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}_1 = \dfrac{Y(s)}{W(s)}$,

  onde: $\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1 w \text{ (ruído na entrada)} \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + v \text{ (ruído no sensor)} \end{array}$

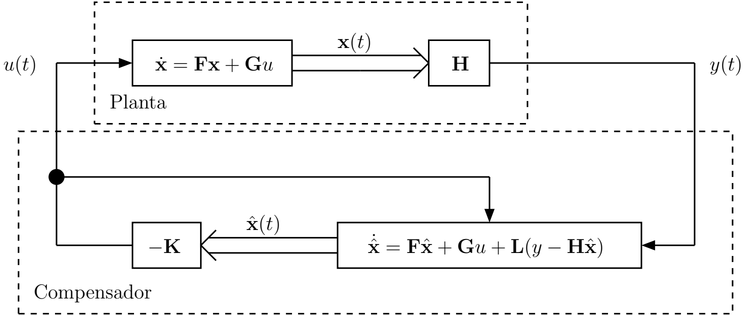
- Equação do erro de estimação:
$$\begin{array}{rl} & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1 w \\ - & \\ & \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}v \\ \hline & \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_1 w - \mathbf{L}v \end{array}$$

- Solução: $\mathbf{L}$ tal que os pólos do erro de estimação são as raízes do SRL: $1 + qG_e(s)G_e(-s) = 0$. O valor de q representa a razão [ruído na entrada]/[ruído no sensor].

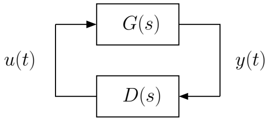
Ver no website – Lista de Exercícios #4 e Projeto Prático #1

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

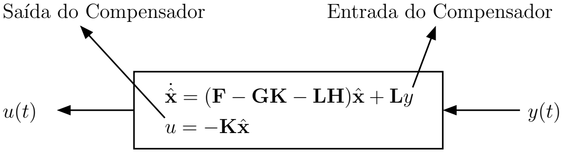
6. Compensadores



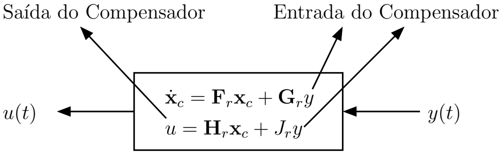
Então, o sistema em malha fechada (sem entrada de referência, no entanto) fica:



Compensador baseado
em estimador de estados
de ordem completa



Compensador baseado
em estimador de estados
de ordem reduzida



Em ambos os casos: $D(s) = \dfrac{U(s)}{Y(s)}$.

Queremos saber:

1. Equação característica (pólos) do sistema em malha fechada

   $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \qquad \xrightarrow{\underline{u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}}} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

   Qual é o efeito de $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$?

2. Função de transferência do compensador (estimador e controlador) em malha aberta: $D(s) = U(s)/Y(s)$.

3. Função de transferência em malha fechada: $H(s) = Y(s)/R(s)$ (depende da aplicação da entrada e referência, que será vista na Seção 7).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} - \mathbf{GK}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{F} - \mathbf{GK})\mathbf{x} + \mathbf{GK}\tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{LH})\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{GK} & \mathbf{GK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} - \mathbf{LH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \qquad (\text{“Estado}'\text{”} = \text{“Matriz } \mathbf{F}\text{”} \;.\; \text{“Estado”})$$

$$\text{Pólos: } \begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} & -\mathbf{GK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left\{ \text{Obs.:} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A}).\det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}) \right\}$$

$$\text{Então:} \qquad \underbrace{|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK}|}_{\substack{\alpha_c(s) \\ \text{Pólos da regra} \\ \text{de controle}}} . \underbrace{|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}|}_{\substack{\alpha_e(s) \\ \text{Pólos do erro} \\ \text{de estimação}}} = 0$$

Princípio da Separação: $\alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0 \longrightarrow$ os projetos do controlador e do compensador podem ser feitos separadamente.

6.2. Função de Transferência do Compensador (em Malha Aberta)

a) Compensador baseado em estimador de ordem completa:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \\ u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Portanto: $\boxed{D(s) = \dfrac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{L}}$

Pólos do compensador: $|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H}| = 0 \longrightarrow$ os pólos do compensador não foram especificados, nem usados no seu projeto. O compensador <u>pode até mesmo ser instável</u>.

b) Compensador baseado em estimador de ordem reduzida:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab}) \underbrace{\hat{\mathbf{x}}_b}_{\downarrow \atop \mathbf{x}_c + \mathbf{L}y} + (\mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{aa})y + (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}\mathbf{G}_a) \underbrace{u}_{\downarrow \atop -K_a y - \mathbf{K}_b(\mathbf{x}_c + \mathbf{L}y)} \text{ (da aula passada).}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = [\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_b]\mathbf{x}_c +$$
$$[\mathbf{F}_{bb}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab}\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_a - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_b\mathbf{L}]y$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = [\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_b - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_b]\mathbf{x}_c +$$
$$\{[\mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_b - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_b]\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}_a)K_a\}y$$

Quanto à saída $u(t)$ do compensador:

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} K_a & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b \underbrace{\hat{\mathbf{x}}_b}_{\downarrow \atop \mathbf{x}_c + \mathbf{L}y}$$

$$u = -\mathbf{K}_b\mathbf{x}_c + (-K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L})y$$

Então: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_r \mathbf{x}_c + \mathbf{G}_r y \\ \\ u = \mathbf{H}_r \mathbf{x}_c + J_r y \end{cases}$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_r &= \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{F}_{ab} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)\mathbf{K}_b \\
\mathbf{G}_r &= \mathbf{F}_r\mathbf{L} + \mathbf{F}_{ba} - \mathbf{L}F_{aa} - (\mathbf{G}_b - \mathbf{L}G_a)K_a \\
\mathbf{H}_r &= -\mathbf{K}_b \\
J_r &= -K_a - \mathbf{K}_b\mathbf{L}
\end{aligned}$$

$$\boxed{D(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \mathbf{H}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_r)^{-1}\mathbf{G}_r + J_r}$$

- $J_r \neq 0$: conexão direta de $y(t)$ para $u(t)$
- Um pólo a menos do que a planta
- Pólos ($|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_r| = 0$) são inteiramente distintos dos pólos da planta e das raízes de $\alpha_c(s)$ e $\alpha_e(s)$.

EXEMPLO #21: Compensador baseado em estimador de estados de ordem reduzida. Sistema em malha fechada.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\left(\text{Note que } G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \right)$$

Pólos desejados em malha fechada:

$$\longrightarrow \alpha_c(s) = (s+5)(s+5) = s^2 + 10s + 25$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}| = s^2 + \left(\frac{k_1}{3} - \frac{k_2}{3} + 5 \right) s + \left(\frac{4k_1}{3} - \frac{k_2}{3} + 4 \right)$$

$$k_1 = 16 \quad \text{e} \quad k_2 = 1$$

$$\longrightarrow \alpha_e(s) = s + 40 \text{ (do EXEMPLO \#20)}$$

$$L = -12 \qquad \left(\text{utilizando } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad (\mathbf{L}_z)$$

Continuação do EXEMPLO #21: Compensador definido por:

- $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{K}_z\hat{\mathbf{z}}$

  $$\mathbf{K}_z = \mathbf{K}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 16 & -15 \end{array}\right]$$

  $K_{za} = 16$ e $\mathbf{K}_{zb} = -15$

- $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{zbb} - \mathbf{L}_z\mathbf{F}_{zab} - (\mathbf{G}_{zb} - \mathbf{L}_z G_{za})\mathbf{K}_{zb}$

  $$\mathbf{F}_r = -4 - (-12) \times (-3) - \left(-\frac{1}{3} - (-12) \times 0\right) \times (-15) = -45$$ (números do EXEMPLO #20)

- $\mathbf{G}_r = \mathbf{F}_r\mathbf{L}_z + \mathbf{F}_{zba} - \mathbf{L}_z F_{zaa} - (\mathbf{G}_{zb} - \mathbf{L}_z G_{zaa})K_{za}$

  $$\mathbf{G}_r = -45 \times (-12) + 0 - (-12) \times (-1) - \left(-\frac{1}{3} - (-12) \times 0\right) \times 16$$

  $$\mathbf{G}_r = 44 \times 12 + \frac{16}{3} = \frac{1600}{3}$$

- $\mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_{zb} \longrightarrow \mathbf{H}_r = 15$

- $J_r = -K_{za} - \mathbf{K}_{zb}\mathbf{L}_z \longrightarrow J_r = -16 - (-15) \times (-12) = -196$

Continuação do EXEMPLO #21:

Então: $D(s) = 15 \times \dfrac{1}{s+45} \times \dfrac{1600}{3} - 196 \longrightarrow \boxed{D(s) = \dfrac{-196s - 820}{s+45}}$

Sistema em malha fechada:

$$\frac{G(s)}{1 - G(s)D(s)} = \frac{\dfrac{1}{s^2+5s+4}}{1 + \dfrac{1}{s^2+5s+4} \cdot \dfrac{196s+820}{s+45}}$$

$$= \frac{s+45}{s^3+50s^2+425s+1000} = \frac{\overbrace{s+45}^{\gamma(s):\ \text{pólos do compensador}}}{\underbrace{(s^2+10s+25)}_{\alpha_c(s)}\underbrace{(s+40)}_{\alpha_e(s)}}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^3+50s^2+425s+1000 & s+40 \\
\underline{s^3+40s^2} & \overline{s^2+10s+25} \\
\quad 10s^2+425s+1000 & \\
\quad \underline{10s^2+400s} & \\
\qquad 25s+1000 & \\
\qquad \underline{25s+1000} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

```
MATLAB:

>> ng = 1; dg = [1 5 4];

>> nd = [-196 -820]; dd = [1 45];

>> n = conv(ng,dd);

>> d = conv(dg,dd)-conv(ng,nd);

>> roots(d);
```

EXEMPLO #22: Trocando $\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc} 16 & 1 \end{array}\right]$ do EXEMPLO #21 por $\left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array}\right]$ do EXEMPLO #9, temos:

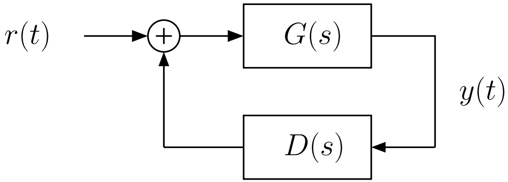
$$\mathbf{K}_z = \mathbf{KT} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{K}_{za} = 2 \text{ e } \mathbf{K}_{zb} = 0$$

Então: $\begin{cases} \mathbf{H}_r = -\mathbf{K}_{zb} = 0 \\ \\ J_r = -\mathbf{K}_{za} - \mathbf{K}_{zb}\mathbf{L}_z = -2 \end{cases}$

E portanto: $D(s) = -2$

Sistema em malha fechada:

$$\frac{G(s)}{1 - G(s)D(s)} = \frac{\dfrac{1}{s^2 + 5s + 4}}{1 + \dfrac{2}{s^2 + 5s + 4}} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \qquad \left(\frac{\gamma}{\alpha_c \alpha_e}\right)$$



$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)D(s)}$$

O cálculo preciso de $H(s)$ vai depender da forma de aplicação da entrada de referência – ver Seção 7.

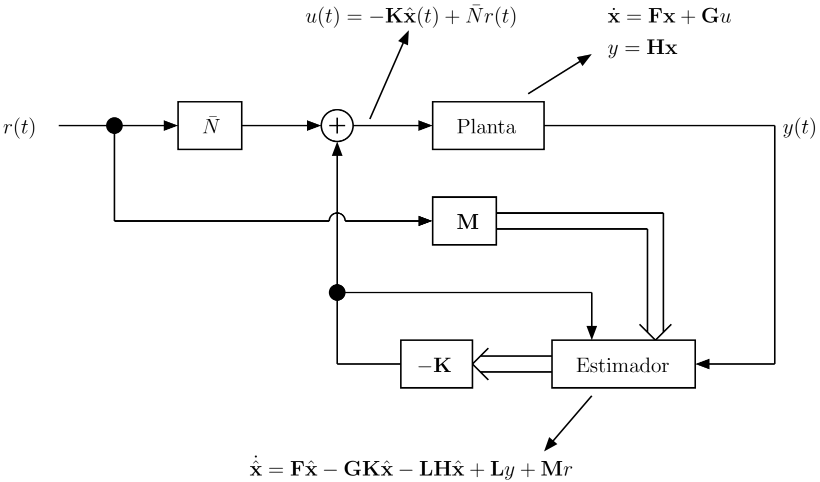
Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

7. Aplicação da Entrada de Referência

Até a Seção 6:

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u & \text{(planta)} \\[2ex]
y = \mathbf{H}\mathbf{x} & \\[6ex]
\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y & \text{(compensador)} \\[2ex]
u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} &
\end{cases}
$$

Nesta Seção, vamos considerar a entrada $r(t)$:



Compensador incluindo a entrada $r(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{M}r \\ u &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r \end{aligned}}$$

Problemas a resolver:

1. Manipulação dos zeros de $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$;
2. Ganho unitário em DC ($y_{ss} = r_{ss}$).

Obs.: na análise a seguir, não estamos considerando o estimador de estados de ordem reduzida. Mas a análise seria essencialmente a mesma.

7.1. Caso I (Zeros Alocados Arbitrariamente)

Objetivos:

- Escolher a posição dos zeros do sistema em malha fechada
- Flexibilidade máxima:

  - Ao definir características transientes da saída

  - Ao atender restrições de estado estacionário

Concentrando-nos na entrada $r(t)$ do compensador (com $y(t) = 0$), vamos considerar os zeros na função de transferência de $r(t)$ para $u(t)$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \overbrace{\mathbf{L}y}^{0} + \underset{\uparrow}{\overset{\text{Entrada}}{}}\mathbf{M}r$$

$$\underset{\text{Saída}}{\underset{\downarrow}{u}} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$$

Zeros de $\dfrac{U(s)}{R(s)}$: $\quad \begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{K} & \bar{N} \end{vmatrix} = 0$

Considerando $\bar{N} \neq 0$: $\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K} & -\dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = 0$

Então, os zeros desejados são as raízes de $\gamma(s)$:

$$\boxed{\gamma(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\mathbf{K}\right)}$$

Escolher $\dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}}$ de forma a posicionar os zeros conforme $\gamma(s)$.

Este método define n zeros da função de transferência de $r(t)$ para $y(t)$:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\gamma(s)b(s)}{\alpha_c(s)\alpha_e(s)}$$

Objetivo:

- Fazer com que os pólos do erro de estimação não apareçam em $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$:

  - $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ não-controlável a partir de $r(t)$

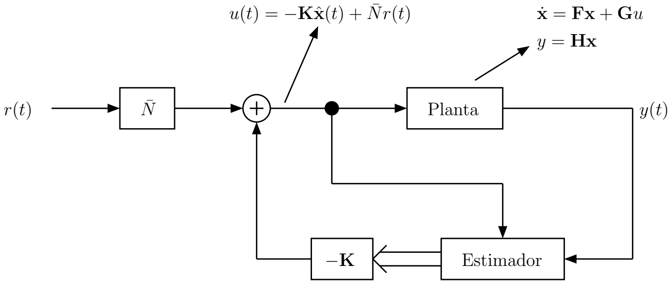
  - $r(t)$ não aparece na equação para $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$.

Considere:

$$
\begin{array}{rl}
 & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\bar{N}r \\
- & \\
 & \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{M}r \\
\hline
 & \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{G}\bar{N}r - \mathbf{M}r}_{\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{G}\bar{N}}}
\end{array}
$$

Então: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{G}u} + \mathbf{L}y$, onde $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$.

Neste caso, o <u>mesmo sinal</u> de controle $u(t)$ é aplicado à planta <u>e</u> ao estimador:



$$\gamma(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{H} - \underbrace{\frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}}_{\frac{\mathbf{G}\bar{N}}{\bar{N}}}\mathbf{K}\right) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\gamma(s)\overbrace{b(s)}^{\text{Zeros da Planta}}}{\underbrace{\alpha_c(s)}_{\text{Pólos do Controlador}}\alpha_e(s)} = \frac{kb(s)}{\alpha_c(s)}$$

Obs.: sobre o Projeto #1:

$$\begin{array}{l} \qquad -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r \\ \qquad\qquad \downarrow \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \end{array}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{L}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{M}r$$

Ou, de forma equivalente, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{H} & \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}\bar{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \bar{N}r$$

7.3. Caso III (Uso do Erro de Rastreamento)

Objetivo:

- Fazer com que a realimentação, dada por:

  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{M}r$

  $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r$

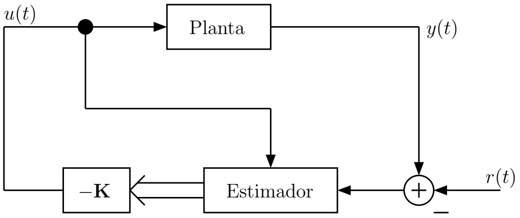
  dependa somente de $e(t) = y(t) - r(t)$.

Considere $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$ e $\bar{N} = 0$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(y - r)$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

- Compensação clássica: o sinal medido pelo sensor é igual ao erro $e(t)$ entre a saída $y(t)$ e o sinal de referência $r(t)$: $e(t) = y(t) - r(t)$.



Zeros do sistema:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{GK}+\mathbf{LH} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{K} & \bar{N} \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad \text{(conforme a Seção 7.1).}$$

$\mathbf{M} = -\mathbf{L}$ e $\bar{N} = 0$:

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{GK}+\mathbf{LH} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\gamma(s)b(s)}{\alpha_c(s)\alpha_e(s)}, \text{ onde } \gamma(s) = \begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{K} & 0 \end{vmatrix} \text{ obrigatoriamente (sem opção).}$$

A resposta de $Y(s)/R(s)$ ao degrau unitário pode sofrer *overshoot* alto demais.

No Caso II: $\bar{N} = N_\mathrm{u} + \mathbf{K}\mathbf{N}_\mathrm{x}$

No Caso III: $\bar{N} = 0$, entrada direta $e(t) = y(t) - r(t)$

No Caso I (Genérico):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\bar{N}r \qquad \text{(Equação (1))}$$

$$\downarrow$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \bar{N}r = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \bar{N}r$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{M}r = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{M}r \qquad \text{(Equação (2))}$$

$$\downarrow$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

Subtraindo (Equação (1) $-$ Equação (2)):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{G} - \frac{\mathbf{M}}{\bar{N}}\right)\bar{N}r$$

Usando as Equações (1) e (3), temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} & \mathbf{G}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} - \dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}} \end{bmatrix} \bar{N}r$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{s=0} = -\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}-\mathbf{GK} & \mathbf{GK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}-\mathbf{LH} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}-\dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}} \end{bmatrix} \bar{N} = 1$$

$$\left\{ \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \quad \right\}$$

Então: $\boxed{\bar{N} = -\dfrac{1}{\alpha}}$,

onde $\boxed{\alpha = \mathbf{H}(\mathbf{F}-\mathbf{GK})^{-1}\mathbf{G}\left[1-\mathbf{K}(\mathbf{F}-\mathbf{LH})^{-1}(\mathbf{G}-\dfrac{\mathbf{M}}{\bar{N}})\right]}$

$\downarrow$

Obs.1: não conhecemos aqui $\bar{N}$, mas conhecemos $\mathbf{M}/\bar{N}$ a partir de $\gamma(s)$.

Obs.2: método alternativo, no caso em que $\mathbf{M} = 0$:

```
>> GDC = n(length(n))/d(length(d));

>> Nbar = 1/GDC;
```

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

8. Controle Integral

Rastreamento robusto (rejeição de perturbações)

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1 w$

$y = \mathbf{H}\mathbf{x}$

Mais um estado: $\dot{x}_i = \mathbf{H}\mathbf{x} - r$

$$x_i = \int_0^t e(\tau)d\tau$$

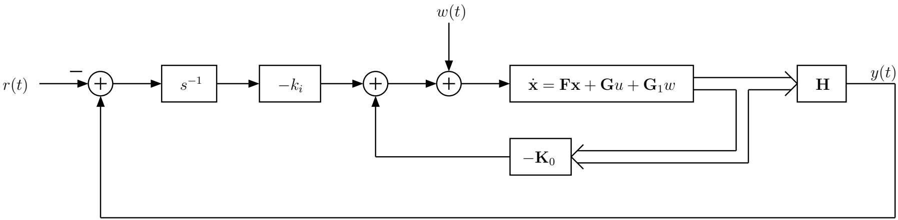
Equações de estado aumentadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Nova regra de controle:

$$u = -\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} k_i & \mathbf{K}_0 \end{array}\right]}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{G}k_i & \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO #23: $G(s) = \dfrac{1}{s+3}$ $\qquad \left(\begin{array}{l} \dot{x} = -3x + u \\ y = x \end{array} \right)$

Controle integral – dois pólos em $s = -5$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_i} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_i} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_i\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_i & k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_i & -3 - k_0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i\mathbf{K}\right) = \alpha_c(s)$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} s & 1 \\ k_i & s + k_0 + 3 \end{vmatrix}}_{s^2 + (k_0+3)s + k_i} = (s+5)(s+5) = s^2 + 10s + 25$$

$$s^2 + (k_0+3)s + k_i \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{l} k_i = 25 \\ k_0 = 7 \end{array}$$

EXEMPLO #24: Análise Assintótica (Ganho DC) – utilizando os números do EXEMPLO #23:

$$u = -\begin{bmatrix} 25 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} \end{array}$$

1. $$\frac{Y(s)}{R(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}}{s^2+10s+25} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{25}{s^2+10s+25}$$

Note que $\lim_{s \to 0} \dfrac{Y(s)}{R(s)} = 1$

2. $$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\begin{bmatrix} -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+10s+25} = \frac{s}{s^2+10s+25}$$

Note que $\lim_{s \to 0} \dfrac{Y(s)}{W(s)} = 0$

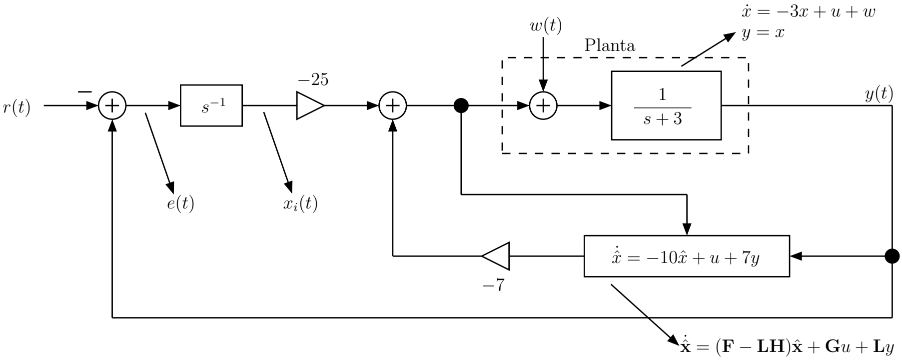
EXEMPLO #25: "Estimador de estados" (com pólo do erro de estimação em $s = -10$), para a planta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + u \\ y &= 1x \end{aligned}$$

$\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H} = -3 - L$ e $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}) = \alpha_e(s)$

$s + 3 + L = s + 10 \longrightarrow L = 7$

Diagrama de blocos:



Simulação baseada em equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}k_i & \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{K}_0 \\ -\mathbf{G}k_i & \mathbf{L}\mathbf{H} & \mathbf{F}-\mathbf{L}\mathbf{H}-\mathbf{G}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Para obter as equações do slide anterior, fizemos o seguinte:

1. $$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \\ * \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \\ * \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ * \end{bmatrix} r$$

2. Substituir u por $-\mathbf{K}\begin{bmatrix} x_i \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_i & \mathbf{0} & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$

3. $$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{LH})\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\left(-\begin{bmatrix} k_i & \mathbf{0} & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}\right) + \mathbf{LHx}$$

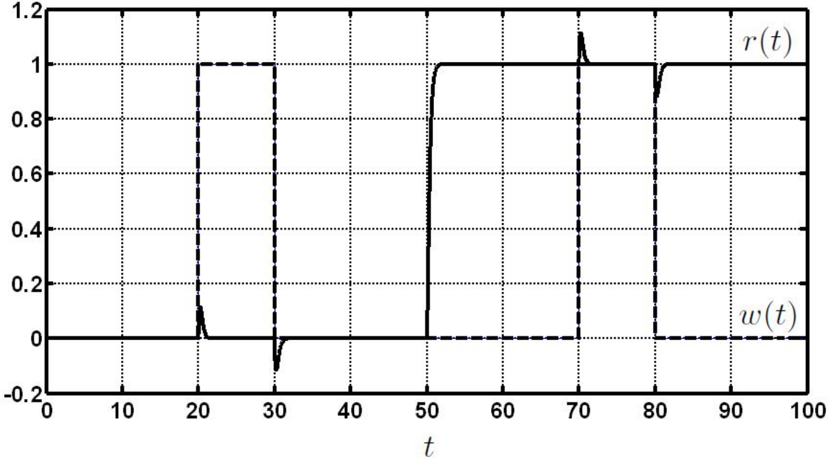
4. Então a terceira linha da equação do item (1) é:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{G}k_i x_i + \mathbf{LHx} + (\mathbf{F} - \mathbf{LH} - \mathbf{GK}_0)\,\hat{\mathbf{x}}$$

No MATLAB:

```
>> clear all;

>> F = -3; G = 1; H = 1; ki = 25; k0 = 7; L = 7; G1 = 1;

>> Fi = [0 H 0 ; -G*ki F -G*k0 ; -G*ki L*H F-L*H-G*k0];

>> Gi = [-1 0 ; 0 G1 ; 0 0];

>> Hi = [0 H 0];

>> Ji = 0;

>> sys = ss(Fi,Gi,Hi,Ji);

>> t = 0:(0.01):(100-0.01);

>> r = stepfun(t,50);

>> w = stepfun(t,20)-stepfun(t,30)+stepfun(t,70)-stepfun(t,80);

>> y = lsim(sys,[r' w'],t);

>> plot(t,y); hold on; plot(t,w); grid on;
```

Resultado da simulação do sistema dos EXEMPLOS #23 a #25:



Ver no website – Lista de Exercícios #5

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

9. Linearização

Quando um sistema é não-linear, não é possível representá-lo na forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\
y &= \mathbf{H}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Para um sistema não-linear, temos:

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, u) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix}
$$

$$
y = \mathbf{H}\mathbf{x}
$$

Obs.: em ambos os casos (linear ou não-linear), assumimos que o sistema é invariante no tempo. Caso contrário, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u, t)$.

A análise do sistema não-linear é difícil. Gostaríamos de substituir:

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \qquad \text{por} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u
$$

Métodos:

1. Pequenos sinais;
2. Realimentação;
3. Não-linearidade inversa.

9.1. Método de Pequenos Sinais

Ponto de equilíbrio (ponto de operação): $\mathbf{x}_0$, u_0.

Neste ponto: $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) = \mathbf{0}$.

Perturbações:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boxed{\delta\mathbf{x}}$$

$$u = u_0 + \boxed{\delta u}$$

$\downarrow$

Novas variáveis de interesse (não mais $\mathbf{x}$ e u)

Podemos escrever a aproximação:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \delta\dot{\mathbf{x}} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) + \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta u$$

onde:

$$\mathbf{F} = \left[\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \; \right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ u=u_0}} = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ u=u_0}}$$

e

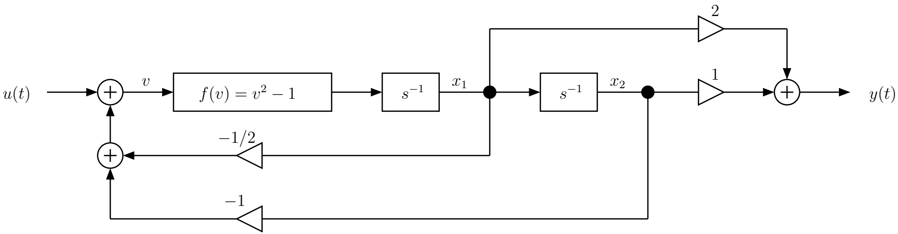
$$\mathbf{G} = \left[\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \; \right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ u=u_0}} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u} \end{array} \right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ u=u_0}}$$

$$\begin{array}{rl} & \dot{\mathbf{x}}_0 + \delta\dot{\mathbf{x}} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) + \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta u \\ - & \\ & \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) \\ \hline & \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta u \\ & \downarrow \\ & \boxed{\text{“ } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \text{ ”}} \end{array}$$

Subtraindo:

Obs.: $\mathbf{x}$ e u na equação “$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$” são perturbações em relação a $\mathbf{x}_0$ e u_0. Nós substituímos $\delta\mathbf{x}$ por $\mathbf{x}$ e δu por u, isto é, usamos as mesmas letras. Mas são variáveis diferentes.

EXEMPLO #26:



Encontrar modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio obtido com $u_0 = 1$ e $\mathbf{x}_{20} > 0$.

$$\dot{x}_1 = v^2 - 1 = \left(u - \frac{1}{2}x_1 - x_2\right)^2 - 1 = f_1(\mathbf{x}, u)$$

$\dot{x}_2 = x_1 = f_2(\mathbf{x}, u)$ (note que f_2 é linear)

Ponto de equilíbrio para $u_0 = 1$ e $x_{20} > 0$:

$f_2(\mathbf{x}_0, u_0) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_{10} = 0}$

$f_1(\mathbf{x}_0, u_0) = 0 \quad \longrightarrow$

$$\left(u_0 - \frac{1}{2}x_{10} - x_{20}\right)^2 - 1 = 0$$

$(1 - x_{20})^2 = 1$

Duas soluções: $x_{20} = 0$ ou $x_{20} = 2$

Usar $\boxed{x_{20} = 2}$

$u_0 = 1$ (dado)

Linearização:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = -2\left(u-\frac{1}{2}x_1-x_2\right)\left.\frac{1}{2}\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = -2\left.\left(u-\frac{1}{2}x_1-x_2\right)\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = 2\left.\left(u-\frac{1}{2}x_1-x_2\right)\right|_{u_0,x_{10},x_{20}} = -2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

Sistema linearizado no ponto de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A partir do sistema linearizado, podemos discutir estabilidade, controlabilidade, etc.

Parte I – Projeto de Sistemas de Controle Contínuos no Espaço de Estados

Aula de Exercícios e Dúvidas

EXEMPLO #27: Controlabilidade e Observabilidade

$$\mathbf{F}_{\mathrm{cm1}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{cm1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{cm1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

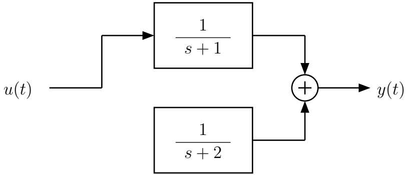
FCM #1:

$$\mathcal{C}_{\mathrm{cm1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathrm{cm1}} & \mathbf{F}_{\mathrm{cm1}}\mathbf{G}_{\mathrm{cm1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Não-controlável}$$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{cm1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{cm1}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{cm1}}\mathbf{F}_{\mathrm{cm1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{Observável}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{cm1}}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\mathrm{cm1}})^{-1}\,\mathbf{G}_{\mathrm{cm1}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} =$$

$$\frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \qquad \text{Perda de Controlabilidade}$$

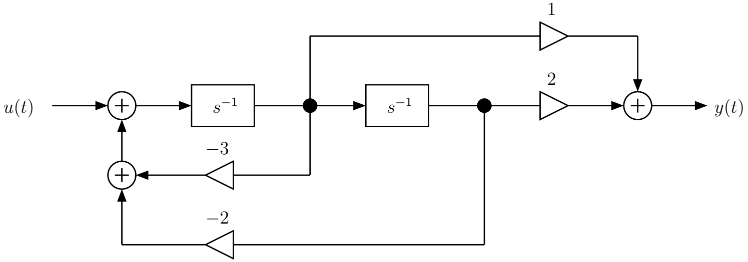


Não existe uma transformação linear $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}_{\text{cm1}}\mathbf{T} = \mathbf{F}_{\text{CC}}$. Entretanto:

$$\mathbf{F}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

FCC: $$\mathcal{C}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{CC}} & \mathbf{F}_{\text{CC}}\mathbf{G}_{\text{CC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Controlável}$$

$$\mathcal{O}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{CC}} \\ \mathbf{H}_{\text{CC}}\mathbf{F}_{\text{CC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{Não-observável}$$



Os sistemas $\mathbf{F}_{\text{cm1}}$ e $\mathbf{F}_{\text{CC}}$ são diferentes, mas têm a mesma função de transferência.

Na FCC deste exemplo, não se pode posicionar arbitrariamente os pólos de $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\mathrm{CC}} + \mathbf{L}\mathbf{H}_{\mathrm{CC}}| = \begin{vmatrix} s + l_1 + 3 & 2l_1 + 2 \\ l_2 - 1 & s + 2l_2 \end{vmatrix} = s^2 + \underbrace{(l_1 + 2l_2 + 3)}_{\alpha_1} s + \underbrace{2l_1 + 4l_2 + 2}_{\alpha_2}$$

$$l_1 + 2l_2 = \alpha_1 - 3$$

$$2l_1 + 4l_2 = \alpha_2 - 2$$

FCM #2:

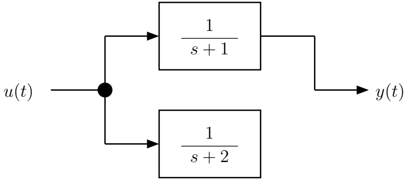
$$\mathbf{F}_{\text{cm2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\text{cm2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\text{cm2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\text{cm2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{cm2}} & \mathbf{F}_{\text{cm2}}\mathbf{G}_{\text{cm2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{Controlável}$$

$$\mathcal{O}_{\text{cm2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{cm2}} \\ \mathbf{H}_{\text{cm2}}\mathbf{F}_{\text{cm2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Não-observável}$$

$$\mathbf{H}_{\text{cm2}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{cm2}}\right)^{-1}\mathbf{G}_{\text{cm2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} =$$

$$\frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \qquad \text{Perda de Observabilidade}$$

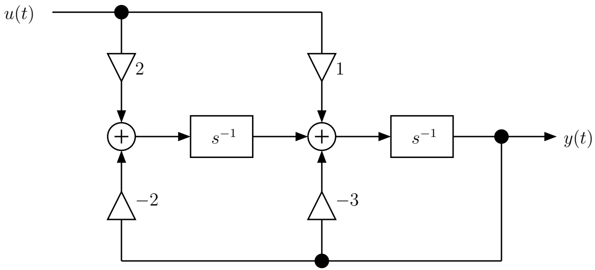


Não existe uma transformação linear $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{F}_{\text{CO}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}_{\text{cm2}}\mathbf{T}$. Entretanto:

$$\mathbf{F}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

FCO: $$\mathcal{C}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{CO}} & \mathbf{F}_{\text{CO}}\mathbf{G}_{\text{CO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{Não-controlável}$$

$$\mathcal{O}_{\text{CO}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{CO}} \\ \mathbf{H}_{\text{CO}}\mathbf{F}_{\text{CO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Observável}$$



Os sistemas $\mathbf{F}_{\text{cm2}}$ e $\mathbf{F}_{\text{CO}}$ são diferentes, mas têm a mesma função de transferência.

Na FCO deste exemplo, não se pode posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em malha fechada (conforme as raízes de $\alpha_c(s)$):

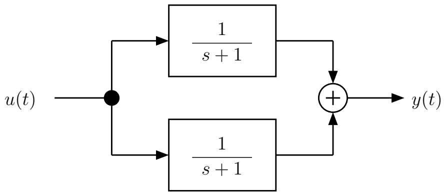
$$|s\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{CO}} + \mathbf{G}_{\text{CO}}\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} s + k_1 + 3 & k_2 - 1 \\ 2k_1 + 2 & s + 2k_2 \end{vmatrix} = s^2 + \underbrace{(k_1 + 2k_2 + 3)}_{\alpha_1} s + \underbrace{2k_1 + 4k_2 + 2}_{\alpha_2}$$

$$k_1 + 2k_2 = \alpha_1 - 3$$

$$2k_1 + 4k_2 = \alpha_2 - 2$$

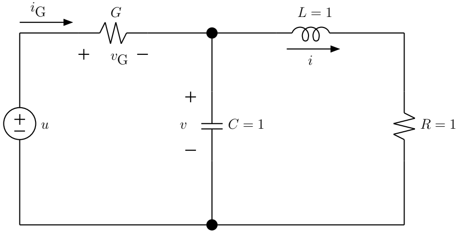
São equivalentes, neste exemplo: $\begin{array}{l} \text{FCM \#1} \Leftrightarrow \text{FCO} \\ \text{FCM \#2} \Leftrightarrow \text{FCC} \end{array}$

Obs.: para pensar:



Não controlável? Não observável?

EXEMPLO #28: Linearização – circuito não-linear:



"Resistor" não-linear: $i_G = v_G(v_G - 1)(v_G - 4)$

Variáveis de Estado: i e v

Saída: i

$$\frac{di}{dt} = -i + v = f_1(i, v, u)$$

$$\frac{dv}{dt} = -i + (u - v)(u - v - 1)(u - v - 4) = f_2(i, v, u)$$

Obs.: para encontrar ponto de equilíbrio → usar $u_0 = 1$ (escolha arbitrária)

$$\frac{di}{dt} = -i + v = f_1(i, v, u)$$

$$\frac{dv}{dt} = -i + (u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 5u^2 + 10uv - 5v^2 + 4u - 4v) = f_2(i, u, v)$$

Equilíbrio (para $u_0 = 1$):

$$f_1 = 0 \longrightarrow -i_0 + v_0 = 0 \longrightarrow i_0 = v_0$$

$$f_2 = 0 \longrightarrow -i_0 - v_0^3 - 2v_0 + 3v_0 = 0 \longrightarrow v_0(v_0^2 + 2v_0 - 2) = 0$$

$$v_0 = 0 \text{ ou } v_0 = -1 \pm \sqrt{3}$$

Para $u_0 = 1$, há três pontos de equilíbrio:

1. $i_{01} = v_{01} = 0$
2. $i_{02} = v_{02} = 0.73$
3. $i_{03} = v_{03} = -2.73$

Para qualquer um dos pontos de equilíbrio:

$$\frac{\partial f_1}{\partial i} = -1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial i} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = -3u^2 + 6uv - 3v^2 + 10u - 10v - 4$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 3u^2 - 6uv + 3v^2 - 10u + 10v + 4$$

Ponto de equilíbrio #1:

$$u_{01} = 1 \qquad v_{01} = i_{01} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial v}\right|_{u_0=1, v_{01}=0} = -3 + 10 - 4 = 3; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{-3}{s^2 - 2s - 2}$$

Pólos: -0.73 e 2.73 (sistema instável)
$\det(\mathcal{C}) = -9$ e $\det(\mathcal{O}) = 1$

Ponto de equilíbrio #2:

$$u_{03} = 1 \qquad v_{03} = i_{03} = 0.73$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial v}\right|_{u_0=1, v_{03}=0.73} = -3 + 4.38 - 1.60 + 10 - 7.3 - 4 = -1.52;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 1.52$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.52 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1.52}{s^2 + 2.52s + 2.52}$$

Pólos: $-1.26 \pm 0.97j$ (sistema estável)
$\det(\mathcal{C}) = -2.31$ e $\det(\mathcal{O}) = 1$

Ponto de equilíbrio #3:

$$u_{02} = 1 \qquad\qquad v_{02} = i_{02} = -2.73$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial v}\right|_{u_0=1, v_{02}=-2.73} = -3 - 16.38 - 22.36 + 10 + 27.3 - 4 = -8.44;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 8.44$$

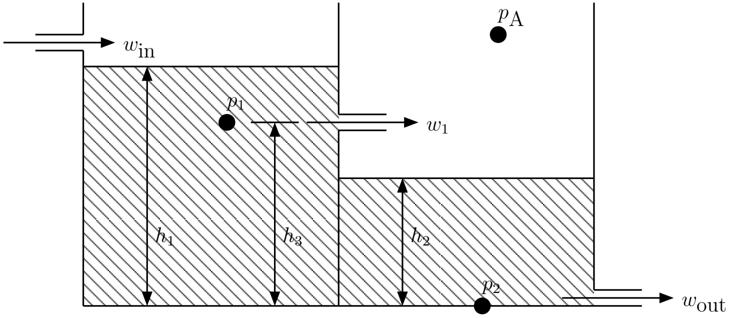
$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -8.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8.44 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{8.44}{s^2 + 9.44s + 9.44}$$

Pólos: -8.30 e -1.14 (sistema estável)
$\det(\mathcal{C}) = -71.2$ e $\det(\mathcal{O}) = 1$

EXEMPLO #29: Linearização – dois tanques:



Dados: $\begin{cases} \text{Área dos tanques: } A \\ \text{Densidade do fluido: } \rho \\ \text{Gravidade: } g \end{cases}$

Lei de escoamento: $w = \alpha\sqrt{p_1 - p_2}$

Entrada: $w_{\text{in}} = u$

Saída: h_2

Estados: h_1 e h_2

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A\rho}(w_{\text{in}} - w_1)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A\rho}(w_1 - w_{\text{out}})$$

$$\rho \to \frac{g}{m^3}$$

$$w \to \frac{g}{seg}$$

$$A \to m^2$$

Não são equações de estado ainda. Falta relacionar: $\begin{array}{l} w_1 \longleftrightarrow h_1, h_2 \\ w_{\text{out}} \longleftrightarrow h_1, h_2 \end{array}$

Equações para substituição:

$$w_1 = \alpha\sqrt{p_1 - p_{\text{A}}} = \alpha\sqrt{\rho g(h_1 - h_3)}$$
$$\downarrow$$
$$p_1 = p_{\text{A}} + \rho g(h_1 - h_3)$$

$$w_{\text{out}} = \alpha\sqrt{p_2 - p_{\text{A}}} = \alpha\sqrt{\rho g h_2}$$
$$\downarrow$$
$$p_2 = p_{\text{A}} + \rho g h_2$$

Equações de Estado:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A\rho}(u - \alpha\sqrt{\rho g}\sqrt{h_1 - h_3}) = f_1(h_1, h_2, u)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A\rho}(\alpha\sqrt{\rho g}\sqrt{h_1 - h_3} - \alpha\sqrt{\rho g}\sqrt{h_2}) = f_2(h_1, h_2, u)$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_{h_1=h_{10}} = \frac{-\alpha\sqrt{\rho g}}{2A\rho\sqrt{h_{10} - h_3}} = \sigma_1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial h_2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_{h_1=h_{10}} = \frac{\alpha\sqrt{\rho g}}{2A\rho\sqrt{h_{10} - h_3}} = -\sigma_1 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_{h_2=h_{20}} = \frac{-\alpha\sqrt{\rho g}}{2A\rho\sqrt{h_{20}}} = \sigma_2$$

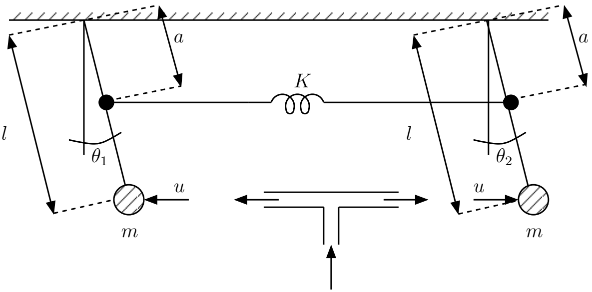
$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{1}{A\rho} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

O sistema linearizado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/(A\rho) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO #30: Dois pêndulos com acomplamento. Saída: $y = \theta_1$.



Equações: $$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta}_1 &= -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu \\ ml^2\ddot{\theta}_2 &= -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu \end{aligned}$$

Notação mais simples: $$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \alpha(\theta_1 - \theta_2) + \beta\theta_1 + \gamma u \\ \ddot{\theta}_2 &= \alpha(\theta_2 - \theta_1) + \beta\theta_2 - \gamma u \end{aligned}$$ (consideraremos $\gamma = 1$)

Variáveis de estado: $$\begin{cases} x_1 = \theta_1 \\ x_3 = \dot{x}_1 \longrightarrow \ddot{x}_1 = \dot{x}_3 = \alpha(x_1 - x_2) + \beta x_1 + u \\ x_2 = \theta_2 \\ x_4 = \dot{x}_2 \longrightarrow \ddot{x}_2 = \dot{x}_4 = \alpha(x_2 - x_1) + \beta x_2 - u \end{cases}$$

Representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha+\beta & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha+\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & B & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $A = \alpha + \beta$ e $B = -\alpha$.

Controlabilidade:

$$\mathbf{FG} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F^2G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A-B \\ B-A \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F^3G} = \begin{bmatrix} A-B \\ B-A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & A-B \\ 0 & -1 & 0 & B-A \\ 1 & 0 & A-B & 0 \\ -1 & 0 & B-A & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

Dois modos não-controláveis ($\det(\mathcal{C}) = 0$)

Substituição de variáveis:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 \\ z_2 &= x_1 - x_2 \\ z_3 &= \dot{z}_1 \\ z_4 &= \dot{z}_2 \end{aligned}$$

$z_3 = \dot{z}_1$ e $z_4 = \dot{z}_2$ para que seja fácil obter $\dot{z}_3$ e $\dot{z}_4$

Equações de Estado:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \beta z_1 \\ \dot{z}_4 &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = (2\alpha + \beta) z_2 + 2u \end{aligned}$$

Saída:

$$y = x_1 = z_1/2 + z_2/2$$

Então:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2\alpha + \beta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O modo z_3 (pêndulo) e sua derivada não são controláveis a partir da entrada. O modo da mola é controlável.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha + \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Na base de coordenadas x:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & B & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HF}^2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HF}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A & B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \end{bmatrix}$$

EXEMPLO #31: Estimador de ordem reduzida da Lista de Exercícios #5, revisitado:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$F_{bb} - LF_{ab} = 2L \longrightarrow s - 2L = s + 6 \longrightarrow L = -3 \longrightarrow$ Errado! Porque $y \neq x_1$.

Substituição de variáveis:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + 4x_2 && \text{(resolve } y = x_1\text{)} \\ z_2 &= x_2 && \text{(qualquer coisa, exceto múltiplo de } z_1\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (-2x_1 - 2x_2 + u) + 4x_1 = 2x_1 - 2x_2 + u = 2z_1 - 10z_2 + u = \dot{y} \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 = x_1 = z_1 - 4z_2 \qquad \text{(a estimar)} \end{aligned}$$

A estimar: $\dot{z}_2 = -4z_2 + y$ $\qquad (\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u)$
Saída sendo: $\dot{y} - 2y - u = -10z_2$ $\qquad (y = \mathbf{H}\mathbf{x})$

"Usando outras letras": $\begin{aligned} \dot{x} &= -4x + u \\ y &= -10x \end{aligned}$

E o estimador é: $\dot{\hat{x}} = -4\hat{x} + u + L(y - 10\hat{x})$

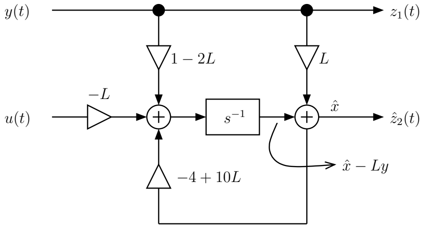
Subtraindo: $\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dot{\tilde{x}} &= -4(x - \hat{x}) + 10L(x - \hat{x}) \\ \dot{\tilde{x}} &= (-4 + 10L)\tilde{x} \end{aligned}$

Projeto: $s\mathbf{I} -$ "$\mathbf{F}$" $= s + 4 - 10L = s + 6 \longrightarrow 4 - 10L = 6 \longrightarrow \boxed{L = -0.2}$

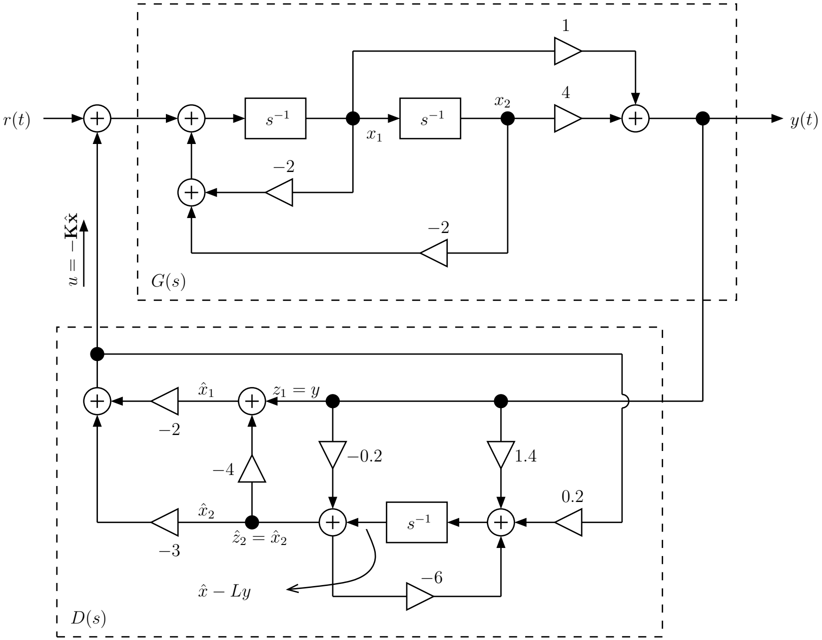
Implementação:

$$\dot{\hat{x}} = (-4+10L)\hat{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ y}}{u} + \underset{\substack{\downarrow \\ \dot{y}-2y-u}}{Ly}$$

$$\dot{\hat{x}} - L\dot{y} = (-4+10L)\hat{x} + y(1-2L) - L$$



No slide a seguir: $\dfrac{U(s)}{Y(s)} = \dfrac{-3s-5}{s+5}$ (calcular)



$r(t)$
$y(t)$
1
4
s^{-1}
s^{-1}
x_1
x_2
-2
-2
$G(s)$
$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$
$\hat{x}_1$
$z_1 = y$
-2
-4
-0.2
1.4
0.2
$\hat{x}_2$
$\hat{z}_2 = \hat{x}_2$
-3
s^{-1}
-6
$\hat{x} - Ly$
$D(s)$

EXEMPLO #32: Vetor **M**:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$p_c = -1 \pm j \longrightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad p_e = -5 \pm 5j \longrightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Compensador: $\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \\ u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \end{array}$ $\qquad \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & -52 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$

$$D(s) = \frac{-120s - 100}{s^2 + 12s + 72}$$

$$\frac{G(s)}{1 - G(s)D(s)} = \frac{s^2 + 12s + 7}{s^4 + 12s^3 + 72s^2 + 120s + 100} =$$

$$\frac{(s + 6 + 6j)(s + 6 - 6j)}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)(s + 5 + 5j)(s + 5 - 5j)}$$

Calcular $\mathbf{M}$ para que sistema em malha fechada tenha zeros em $-4 \pm 4j$:

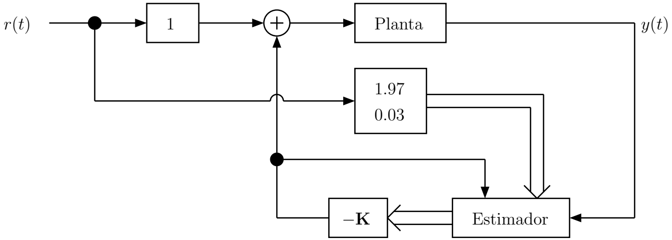
$$(s+4+4j)(s+4-4j) = s^2+8s+32$$

$$\left| s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GK} + \mathbf{LH} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = s^2+8s+32$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\mu_1 & -2\mu_1 \\ -2\mu_2 & -2\mu_2 \end{bmatrix} \right| = s^2+8s+32$$

$\mu_1 = 1.97$ e $\mu_2 = 0.03$, onde $\mu_1 = \dfrac{m_1}{\bar{N}}$ e $\mu_2 = \dfrac{m_2}{\bar{N}}$

Implementação:



Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

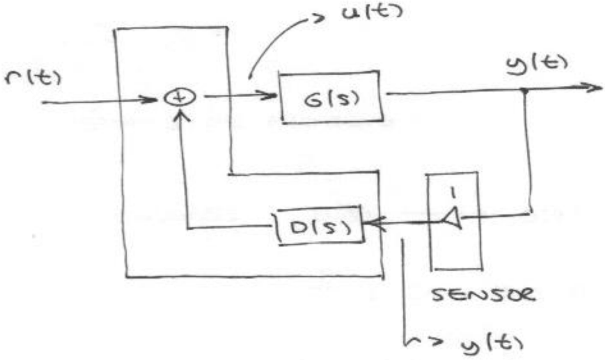
Contexto:

- Eletrônica analógica (filtros contínuos)
  - Controle contínuo
  - Soma, multiplicação, integral
  - Transformada de Laplace
  - Representação única
- Eletrônica digital (microprocessador)
  - Controle digital
  - Soma, multiplicação, atraso
  - Transformada Z
  - *Aliasing*

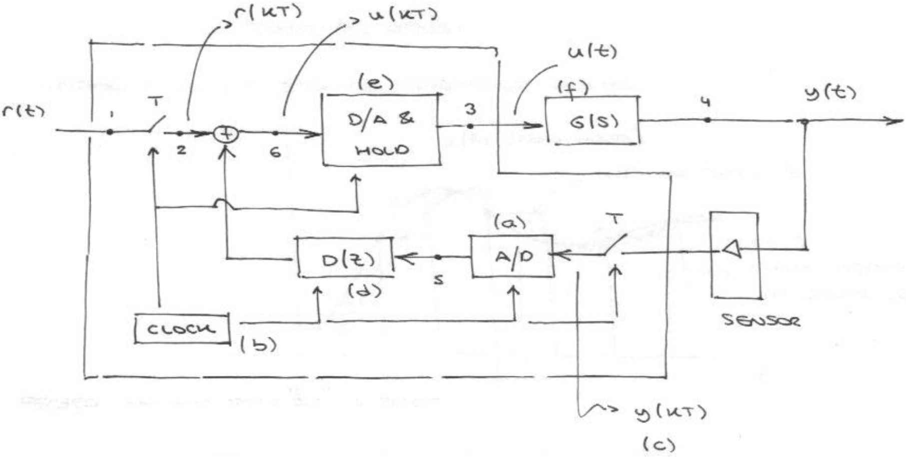
Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

1. Digitalização

Sistema de controle contínuo:



Sistema de controle digital:



Observações:

(a) Conversor A/D – 10 a 16 bits

(b) Clock: sistema de interrupção

"*Free-running*" ou taxa de amostragem $1/T$ (com período T fixo)

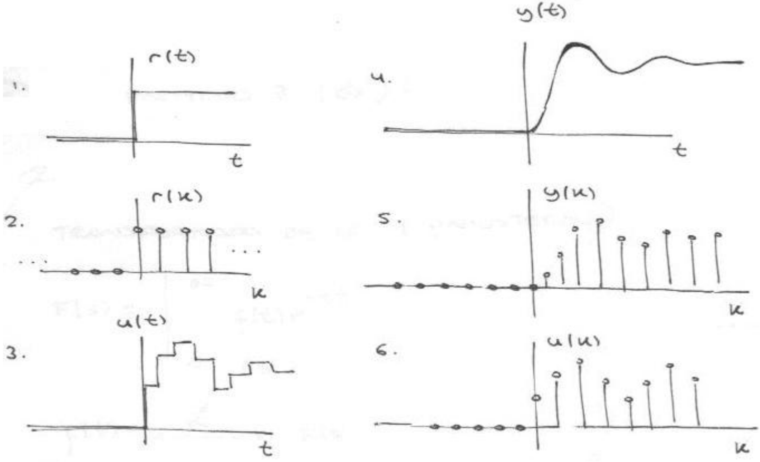
(c) Sinal amostrado: $y(kT) = y(k)$

(d) $D(z)$: equação a diferenças

(e) ZOH: $u(k) \longrightarrow u(t)$ (*zero-order hold*)

(f) Atuador (tempo contínuo)

Sinais:

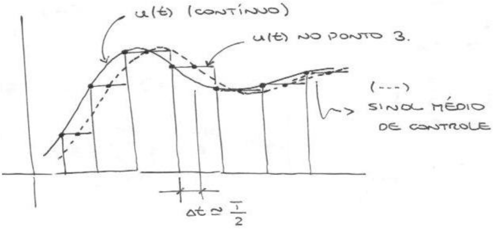


Métodos de projeto:

1. Emulação: $D(s) \longrightarrow D(z)$. É um método aproximado. Taxa de amostragem $(1/T) \simeq 20 \times$ BW do sistema em malha fechada.

2. Projeto direto (exato): $D(z)$ calculado diretamente a partir de $G(z)$. Taxa de amostragem bem inferior à do projeto aproximado.

Impacto do sistema de controle digital:



$\longrightarrow$ Atraso médio de $T/2$ do sinal médio de controle em relação ao $u(t)$ contínuo.

Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

2. Transformada Z (Revisão)

Lembrando a Transformada de Laplace (unilateral):

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} F(s)$$

Propriedade da derivada: $\dfrac{df}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sF(s) - f(0)$

Definição de Transformada Z:

- Unilateral (esta é a que vamos usar):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$f(k) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} F(z)$$

Propriedade do avanço: $f(k+1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} z(F(z) - f(0))$ (Equação (1))

- Bilateral

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$f(k) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} F(z)$$

Propriedade do avanço: $f(k+1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} zF(z)$ (Equação (2))

Sobre as propriedades de avanço no slide anterior:

Equação (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k}$$

$$= z\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-(k+1)}$$

$$(l = k+1 \; ; \; k = 0 \longrightarrow l = 1)$$

$$= z\sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$= z\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - f(0)\right]$$

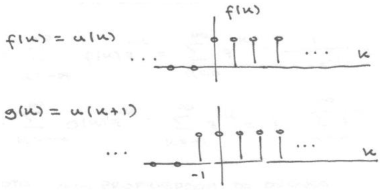
Equação (2):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+1)z^{-k}$$

$$= z\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+1)z^{-(k+1)}$$

$$= z\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-(k)}$$

EXEMPLO #1: Degrau unitário discreto:



Calcular $F(z)$ e $G(z)$ usando a transformada Z unilateral. Relacionar as funções $F(z)$ e $G(z)$ usando a propriedade do avanço. Repetir o exemplo, usando a transformada Z bilateral.

Observação: $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = ?,\ |\rho| < 1.$

$$S_n = \rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}$$

$$S_{n+1} = \rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} + \rho^n = \rho S_n + \rho^0$$

Note que: $\rho S_n + \rho^0 = S_n + \rho^n \longrightarrow S_n(1-\rho) = 1 - \rho^n$

Então: $S_n = \dfrac{1-\rho^n}{1-\rho}$

Transformada Z unilateral:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

De fato, pela propriedade do avanço:

$$G(z) = z(F(z) - f(0)) = z\left(\frac{z}{z-1} - 1\right) = \frac{z(z - z + 1)}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Transformada Z bilateral:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=-1}^{\infty} z^{-k} = z + \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = z + \frac{z}{z - 1} =$$

$$= \frac{z^2 - z + z}{z - 1} = \frac{z^2}{z - 1}$$

De fato, pela propriedade do avanço:

$$G(z) = zF(z) = \frac{z^2}{z - 1}$$

Obs.: refazer este exemplo para $f(k) = u(k-1)$ e $g(k) = u(k)$.

$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n)$

$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$ (caso particular $n = 2$)

Assumindo condições iniciais nulas:

$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = U(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

Alternativamente:

$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_0 u(k+2) + b_1 u(k+1) + b_2 u(k)$

Assumindo condições iniciais nulas:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}}$$

EXEMPLO #2: $y(k) + 3y(k-1) = u(k)$ ($u(k)$ uma entrada qualquer para a planta)

$$(1 + 3z^{-1})Y(z) = U(z) \longrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

EXEMPLO #3: $y(k) = \alpha^k u(k)$ ($u(k)$ é o degrau unitário)

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

(ROC: $|z| > |\alpha|$)

a) $f(k) = \dfrac{1}{2\pi j} \oint_{\circlearrowleft} F(z) z^{k-1} dz$ (não vamos usar esta expressão).

b) Expansão em frações parciais $\longrightarrow$ inversão usando tabela:

EXEMPLO #4: $\left[\begin{array}{l} G(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z+3)}, \ |z| > 3 \\ \\ U(z) = \dfrac{z}{z-1} \ \text{(entrada: degrau unitário) Calcular } Y(z). \end{array} \right.$

$$Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z+2)(z+3)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)(z+3)} = \frac{1/6}{z-1} + \frac{1/3}{z+2} + \frac{-1/2}{z+3}$$

$$Y(z) = \frac{1}{6} . \frac{z}{z-1} + \frac{1}{3} . \frac{z}{z+2} - \frac{1}{2} . \frac{z}{z+3}$$

$$y(k) = \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(-2)^k - \frac{1}{2}(-3)^k \right] u(k)$$

c) Divisão Longa:

EXEMPLO #5:

$$
\begin{array}{l|l}
1 \ (= N(z)) & 1 + 3z^{-1} \ (= D(z)) \\
1 + 3z^{-1} & \hline \\
\hline
\quad -3z^{-1} & 1 - 3z^{-1} + 9z^{-2} - 27z^{-3} + \ldots \\
\quad -3z^{-1} - 9z^{-2} & \\
\hline
\qquad 9z^{-2} & \\
\qquad 9z^{-2} + 27z^{-3} & \\
\hline
\qquad\qquad -27z^{-3} &
\end{array}
$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)}$$

Ganho DC:

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

A resposta de $G(z)$ ao degrau unitário é $y(k)$:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G(z)\frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z\to 1} G(z)$$

Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

3. Correspondência entre s e z

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$f(kT) = e^{-akT}u(kT)$$

$$f(k) = e^{-aTk}u(k)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

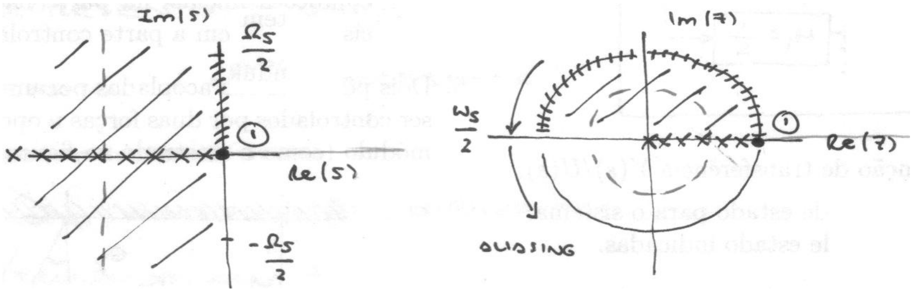
Pólo: $s = -a$

Pólo: $z = e^{-aT}$

Mapeamento de pólos:

$$\boxed{z \longrightarrow e^{sT}}$$

Mapeamento de Pólos: $z \longrightarrow e^{sT}$



Projeto Analógico (Emulação): $s = -\sigma \pm j\Omega_d \longrightarrow D(s) \longrightarrow D(z)$

Projeto Discreto (Exato): $s = -\sigma \pm j\Omega_d \longrightarrow z = e^{sT} \longrightarrow D(z)$

Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

4. Projeto Analógico
(Aproximação de $D(s)$ por $D(z)$)

4.1. Mapeamento dos Pólos e Zeros de $D(s)$ segundo $z = e^{sT}$

T pequeno: $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T} >> \Omega_n$, onde Ω_n é a maior frequência natural associada aos pólos de $G(s)$ em malha fechada.

	$D(s)$	$D(z)$
Pólo	s_p	$e^{s_p T}$
Zero Finito	s_z	$e^{s_z T}$
Zero no Infinito	m =grau(denominador)−grau(numerador)	$(z+1)^{m-1}$
Ganho DC	$D(s)\|_{s=0}$	$D(z)\|_{z=1}$

EXEMPLO #6: $D(s) = \dfrac{(s+5)(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$

$$D(z) = \frac{k(z-e^{-5T})(z-e^{-6T})(z+1)}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})(z-e^{-4T})}$$

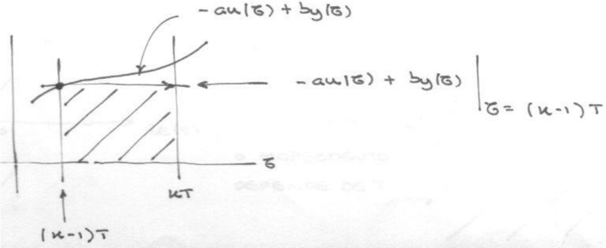
Ganho DC: $D(s)|_{s=0} = \dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$

$$D(z)|_{z=1} = \frac{2k(1-e^{-5T})(1-e^{-6T})}{(1-e^{-T})(1-e^{-2T})(1-e^{-3T})(1-e^{-4T})} = \frac{5}{4}$$

$$k = \frac{5}{8} . \frac{(1-e^{-T})(1-e^{-2T})(1-e^{-3T})(1-e^{-4T})}{(1-e^{-5T})(1-e^{-6T})}$$

EXEMPLO #7: $D(s) = \dfrac{b}{s+a} = \dfrac{U(s)}{Y(s)} \rightarrow \dot{u} + au = by \rightarrow \dot{u} = -au + by$

$$u(t) = \int_0^t (-au(\tau) + by(\tau))d\tau \longleftarrow \text{aproximar por método de integração}$$



$$u(kT) = \underbrace{\int_0^{(k-1)T} (-au(\tau) + by(\tau))d\tau}_{u((k-1)T)} + \underbrace{\int_{(k-1)T}^{kT} (-au(\tau) + by(\tau))d\tau}_{\substack{\text{área do retângulo:} \\ T(-au((k-1)T) + by((k-1)T))}}$$

$$u(kT) = (1 - aT)u((k-1)T) + bTy((k-1)T)$$

$$u(k) = (1 - aT)u(k-1) + bTy(k-1)$$

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{bTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}}$$

$$D(z) = \frac{b}{\dfrac{z-1}{T} + a} \qquad \longleftrightarrow \qquad D(s) = \frac{b}{s+a}$$

Forward Euler: $\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}}$ $\left(\underrightarrow{z = 1 + sT}\right)$

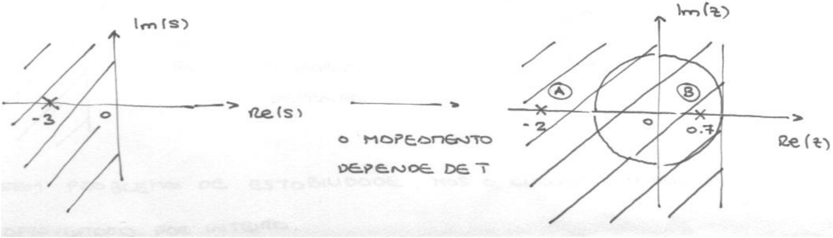
Problema: pode ocorrer que $D(s)$ estável $\longrightarrow$ $D(z)$ instável.

EXEMPLO #8: $D(s) = \dfrac{1}{s+3}$ e $T = 1$:

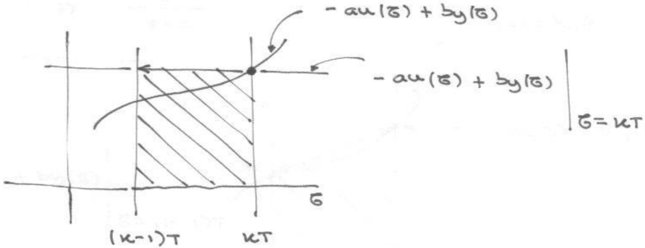
$$s = -3 \qquad \xrightarrow{z = 1 + sT} \qquad z = 1 - 3 = -2 \ (D(z) \text{ instável}) \qquad \boxed{\text{A}}$$

Reduzindo T: $T = \dfrac{1}{10}$

$$s = -3 \qquad \xrightarrow{z = 1 + sT} \qquad z = 1 - \frac{3}{10} = 0.7 \ (D(z) \text{ estável}) \qquad \boxed{\text{B}}$$



EXEMPLO #9: $D(s) = \dfrac{b}{s+a}$



Área do retângulo: $T(-au(kT) + by(kT))$

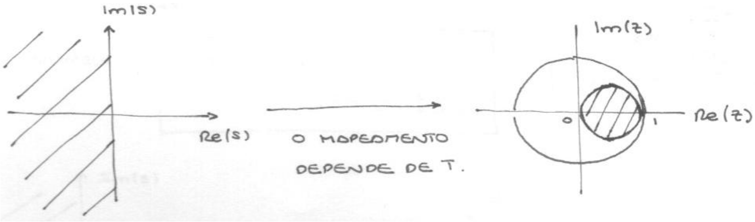
$$u(kT) = u((k-1)T) - aTu(kT) + bTy(kT)$$

$$(1 + aT)u(k) = u(k-1) + bTy(k)$$

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{bT}{1 + aT - z^{-1}} = \frac{b}{\dfrac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$

$$D(z) = \frac{b}{\dfrac{z-1}{Tz} + a} \qquad \longleftrightarrow \qquad D(s) = \frac{b}{s+a}$$

Backward Euler: $\boxed{D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{Tz}}}$ $\left(\underrightarrow{z = \dfrac{1}{1 - sT}}\right)$

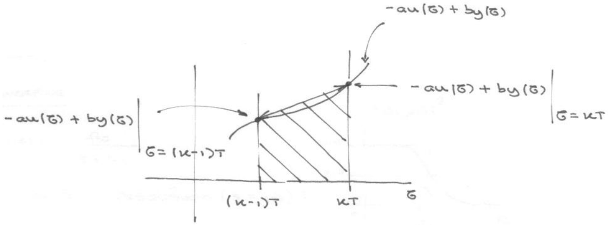


Este mapeamento não tem o problema de estabilidade visto antes (*forward Euler*), mas o círculo unitário não é aproveitado por inteiro.

4.4. Integração Numérica – Transformação Bilinear (Trapézio, Tustin, Newton)

EXEMPLO #10:

$$D(s) = \frac{b}{s+a}$$



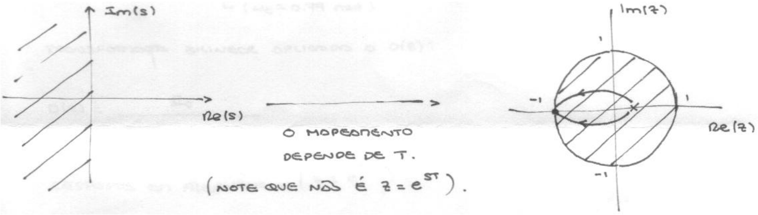
Área do trapézio: $\dfrac{T}{2}\left(-au((k-1)T)+by((k-1)T)-au(kT)+by(kT)\right)$

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}\left(-au(k-1)+by(k-1)-au(k)+by(k)\right)$$

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{bT}{2}(1+z^{-1})}{1+\frac{aT}{2}-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}} = \frac{b(1+z^{-1})}{\frac{2}{T}(1-z^{-1})+a(1+z^{-1})}$$

$$D(z) = \frac{b}{\dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{b}{\dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{z-1}{z+1}} \qquad \longleftrightarrow \qquad D(s) = \frac{b}{s+a}$$

Bilinear: $$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}} \qquad \left(z = \frac{1+\dfrac{T}{2}s}{1-\dfrac{T}{2}s} \right)$$

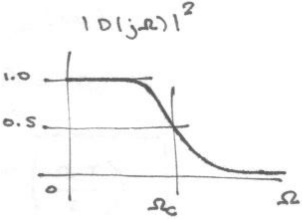


- Sem problema de estabilidade;
- Aproveita o círculo inteiro;
- Problema: distorção em frequência (*warping*).

s	z
0	1.0
$-2T/3$	0.5
$-2/T$	0.0
$-6T$	-0.5

$$D(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

Resposta em frequência ($s = j\Omega$):



Amostragem: $\begin{array}{l} 2\pi \longleftrightarrow \Omega_s \\ \omega_c \longleftrightarrow \Omega_c \end{array}$

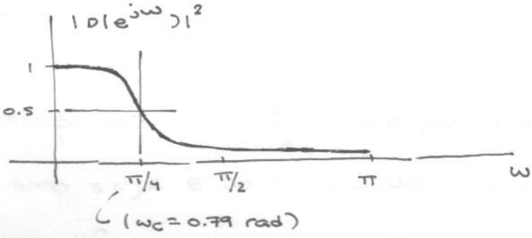
$$\omega_c = 2\pi.\frac{\Omega_c}{\Omega_s} = 2\pi.\frac{\Omega_c}{2\pi/T} = T\Omega_c \rightarrow \boxed{\omega_c = T\Omega_c}$$

(O filtro $D(z)$ equivalente tem $\omega_c = T\Omega_c$)

EXEMPLO #11: Considere $\Omega_c = 40$ rad/seg e $\Omega_s = 320$ rad/seg (então $T = \dfrac{2\pi}{320} = \dfrac{\pi}{160}$ seg).

$$\omega_c = \frac{\pi}{160} \times 40 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

O filtro digital $D(z)$ equivalente tem resposta em frequência:



Transformação bilinear aplicada a $D(s)$: $D(z) = \dfrac{\Omega_c}{\dfrac{2}{T} \cdot \dfrac{z-1}{z+1} + \Omega_c}$

Resposta em frequência ($z = e^{j\omega}$): $D(e^{j\omega}) = \dfrac{\Omega_c}{\dfrac{2}{T} \cdot \dfrac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}+1} + \Omega_c} =$

$$\frac{\Omega_c}{\dfrac{2}{T} \cdot \dfrac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}}} \cdot \dfrac{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{\frac{-j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}} + \Omega_c}$$

$$D(e^{j\omega}) = \frac{\Omega_c}{j\left(\dfrac{2}{T}\tan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\right) + \Omega_c}$$

Frequência de corte: $\dfrac{2}{T}\tan\left(\dfrac{\omega_c}{2}\right) = \Omega_c \longrightarrow \boxed{\omega_c = 2\arctan\dfrac{\Omega_c T}{2}}$

EXEMPLO #12: $\Omega_c = 40$ rad/seg e $T = \dfrac{\pi}{160}$ seg.

Então: $\omega_c = 2\arctan\left(\dfrac{40\pi}{320}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0.75 \text{ rad } (\neq \pi/4 \text{ rad}).$

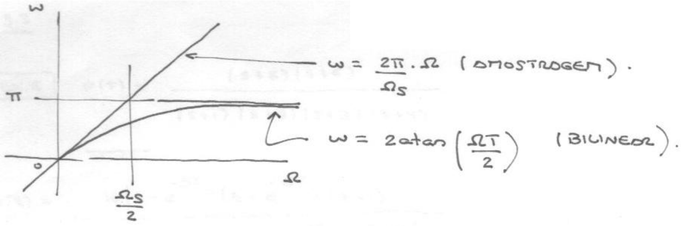
Mas queríamos que, com $T = \dfrac{\pi}{160}$ seg, a frequência de corte de $D(z)$ seja $\omega_c = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

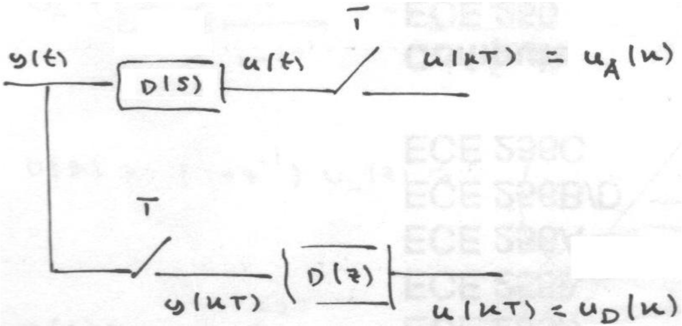
Então: $\Omega_c = \underbrace{\dfrac{2}{\pi/160}}_{101.9} \underbrace{\tan\left(\dfrac{\pi/4}{2}\right)}_{0.4142} = 42 \text{ rad/seg} \qquad \longleftarrow$ (pre-warping)

Obs.: a relação $\omega = 2\arctan\left(\dfrac{\Omega T}{2}\right)$ vale para todas as frequências do eixo $s = j\omega$ e do círculo unitário $z = e^{j\omega}$, e não só para as frequências de corte:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow j\boxed{\Omega} = \frac{2}{T} . a =$$

$$\frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{\frac{-j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}} = j\boxed{\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$





Queremos que $u_\mathrm{D}(k) = u_\mathrm{A}(k)$

Assumindo $y(t)$ como sendo um *degrau unitário*(*):

1. $U(s) = \dfrac{D(s)}{s}$

2. $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{D(s)}{s}\right]$

3. $u_{\mathrm{A}}(k) = u(kT)$

4. $U_{\mathrm{A}}(z) = \mathcal{Z}\left[u_{\mathrm{A}}\right]$

5. Lembrando que $y(kT)$ são amostras de um degrau unitário ($y(k)$ é um degrau discreto):

$$U_{\mathrm{D}}(z) = \frac{D(z)}{(1-z^{-1})} = U_{\mathrm{A}}(z) \longrightarrow D(z) = (1-z^{-1})U_{\mathrm{A}}(z)$$

$$\boxed{D(z) = \frac{z-1}{z}U_{\mathrm{A}}(z)}$$

(*) Obs.: é um método aproximado, porque $y(t)$ não é um degrau unitário, nem é constante por partes.

EXEMPLO #13: $D(s) = \dfrac{2}{s+2}$

$$\frac{D(s)}{s} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+2}$$

$$u(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$$

$$u_\mathrm{A}(k) = (1 - e^{-2Tk})u(k)$$

$$U_A(z) = \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \right)$$

$$D(z) = (1 - z^{-1}) U_\mathrm{A}(z) = \left(1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \right)$$

$$D(z) = \frac{1 - e^{-2T}}{z - e^{-2T}}$$

4.6. Discretização no Espaço de Estados:

Dado um sistema contínuo, linear e invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ \\ y = \mathbf{H}\mathbf{x} + Ju \\ \\ \mathbf{x}(t_0) \text{ qualquer.} \end{cases}$$

Temos:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}u(\tau)d\tau}$$

Obs.: cálculo de $y(t)$ no domínio do tempo

1) Solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$

1A) $u(t) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$

Série de Taylor: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0) + \ldots + \dfrac{\mathbf{x}^{(n)}(0)t^n}{n!} + \ldots$

$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{F}\mathbf{x}(0)$

$\ddot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{F}t\mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{F}^2t^2\mathbf{x}(0)}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{F}^nt^n\mathbf{x}(0)}{n!} + \ldots = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0).$$

1B) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, entrada $u(t)$ – supomos $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{v}(t)$:

$$\mathbf{F}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{v}(t) + e^{\mathbf{F}t}\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{v}(t) + \mathbf{G}u$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{G}u$$

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}u(\tau)d\tau \longrightarrow \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}u(\tau)d\tau$$

2) Cálculo de $e^{\mathbf{F}t}$:

a) Série de Taylor e Forma de Jordan

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}t + \frac{\mathbf{F}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{F}^3 t^3}{3!} + \ldots$$

b) Transformada de Laplace: $\boxed{e^{\mathbf{F}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\right]}$

EXEMPLO #14: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Obs.: solução de $y(t)$ via transformada de Laplace:

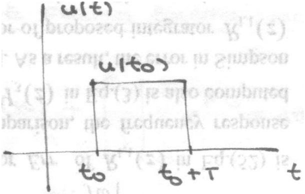
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}(t_0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}U(s)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}u(\tau)d\tau$$

4.6. Discretização no Espaço de Estados (continuação do Slide # 196)

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}u(\tau)d\tau}$$

Se a entrada for um pulso constante de largura T e se conhecermos $\mathbf{x}(t_0)$, então podemos calcular $\mathbf{x}(t_0 + T)$ facilmente:



$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \left[\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}d\tau\right] u(t_0), \text{ se } t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$\mathbf{x}(t_0+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(t_0) + \left[\int_{t_0}^{t_0+T} e^{\mathbf{F}(\underbrace{t_0+T-\tau})}\mathbf{G}d\tau\right]u(t_0)$$

$$v = t_0 + T - \tau$$

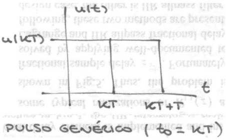
$$\tau = t_0 \longrightarrow v = T$$

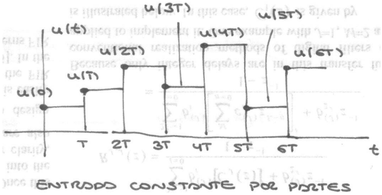
$$\tau = t_0 + T \longrightarrow v = 0$$

$$d\tau = -dv$$

$$x(t_0+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(t_0) - \left[\int_{T}^{0} e^{\mathbf{F}v}\mathbf{G}dv\right]u(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t_0+T) = e^{\mathbf{F}T} + \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau.u(t_0)$$





$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(kT) + \left[\int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau\right] u(kT) \\ y(kT) = \mathbf{H}\mathbf{x}(kT) + Ju(kT) \end{cases}$$

Então, se $u(t)$ é constante por partes $\Longrightarrow$ é possível calcular $\mathbf{x}(t)$ e $y(t)$ *de forma exata* nos instantes $t = kT$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(k) + \left[\int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}d\tau\right] u(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k) \end{cases}$$

De forma abreviada:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k) \end{cases}$$

Assumindo que um compensador $D(s)$ é descrito por $\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}_d\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_d y \\ \\ u = \mathbf{H}_d\hat{\mathbf{x}} + J_d y \end{cases}$

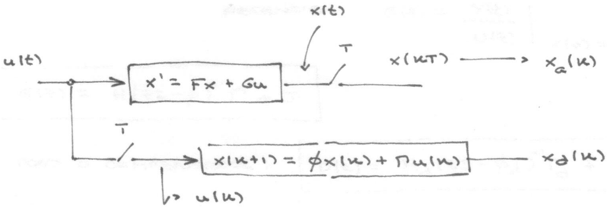
O compensador $D(z)$ aproximado é dado por:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}_d\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}_d y(k) \\ \\ u(k) = \mathbf{H}_d\hat{\mathbf{x}}(k) + J_d y(k) \end{cases}$$

Onde: $\mathbf{\Phi}_d = e^{\mathbf{F}_d T}$ e $\mathbf{\Gamma}_d = \displaystyle\int_0^T e^{\mathbf{F}_d \tau}\mathbf{G}_d d\tau$

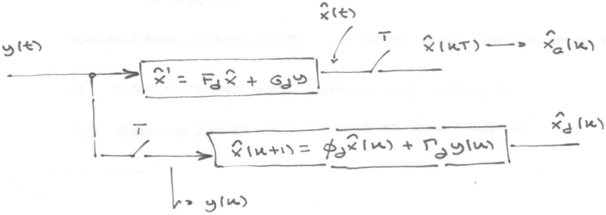
Obs.: estes resultados não são exatos, porque a entrada $y(t)$ do compensador não é uma função constante por partes.

Exato:



u(t) é constante por partes $\longrightarrow \mathbf{x}_{\mathrm{A}}(k) = \mathbf{x}_{\mathrm{D}}(k)$

Aproximado:



y(t) "constante por partes" (não é) $\longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{A}}(k) \simeq \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{D}}(k)$

4.6.1. Resposta $y(k)$ (ou $u(k)$) e Função de Transferência $G(z)$ (ou $D(z)$), a partir das Equações de Estado Discretas

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k) \\ \mathbf{x}(0) \text{ qualquer} \end{cases}$$

Aplicando a transformada Z unilateral à equação que define $\mathbf{x}(k+1)$:

$$\begin{aligned} &z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}(z) + \mathbf{\Gamma}U(z) \\ &\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\Gamma U(z) + (z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\boxed{z}\mathbf{X}(0) \qquad \text{(atenção ao fator } z\text{).} \end{aligned}$$

Então:

$$\boxed{Y(z) = \mathbf{H}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}U(z) + JU(z) + \mathbf{H}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}\right)^{-1} z\mathbf{X}(0)} \quad \begin{pmatrix} \text{daqui obtém-se} \\ y(k) \text{ usando} \\ \text{a transformada} \\ \text{Z inversa} \end{pmatrix}$$

Função de transferência: $G(z) = \left.\dfrac{Y(z)}{U(z)}\right|_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}} \longrightarrow \boxed{G(z) = \mathbf{H}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}\right)^{-1}\Gamma + J}$

Para o compensador: $\boxed{D(z) = \mathbf{H}_d\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_d\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}_d + J_d}$ $\qquad (D(z) = U(z)/Y(z))$

EXEMPLO #15: $D(s) = \dfrac{5s+7}{s^2+3s+2} = \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{3}{s+2}$

Encontrar aproximação discreta $D(z)$ pelos dois métodos:

a) Discretização no espaço de estados

b) Equivalência na resposta ao degrau

---

a) $D(s) = \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{3}{s+2}$

Usando a FCM:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{F}_d T} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \longleftarrow$$ para os casos em que $\mathbf{F}$ não é diagonal, usar $\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\right]$

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^T e^{\mathbf{F}_d \tau} \mathbf{G}_d \, d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-\tau}\Big|_0^T \\ \dfrac{-e^{-2\tau}}{2}\Big|_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

$$D(z) = \mathbf{H}_d \left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_d\right)^{-1} \mathbf{\Gamma}_d$$

$$D(z) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - e^{-T} & 0 \\ 0 & z - e^{-2T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

$$D(z) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z - e^{-T} & 0 \\ 0 & z - e^{-2T} \end{bmatrix}}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})} \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

Numerador: $\quad 2(z - e^{-2T})(1 - e^{-T}) + \dfrac{3}{2}(z - e^{-T})(1 - e^{-2T})$

$$z\left(2 - 2e^{-T} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2T}\right) + \left(-2e^{-2T} + 2e^{-3T} - \frac{3}{2}e^{-T} + \frac{3}{2}e^{-3T}\right)$$

$$D(z) = \frac{\left(\dfrac{7}{2} - 2e^{-T} - \dfrac{3}{2}e^{-2T}\right)z + \left(\dfrac{-3}{2}e^{-T} - 2e^{-2T} + \dfrac{7}{2}e^{-3T}\right)}{z^2 - (e^{-T} + e^{-2T})z + e^{-3T}}$$

b) $$\frac{D(s)}{s} = \frac{5s+7}{s(s+1)(s+2)} = \frac{7/2}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{-3/2}{s+2}$$

$$u(t) = \left(\frac{7}{2} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

$$u_{\mathrm{A}}(k) = \left(\frac{7}{2} - 2e^{-Tk} - \frac{3}{2}e^{-2Tk}\right)u(k)$$

$$U_{\mathrm{A}}(z) = \left(\frac{7}{2}.\frac{z}{z-1} - 2.\frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{3}{2}.\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$D(z) = \frac{z-1}{z}U_{\mathrm{A}}(z) = \frac{7}{2} - \frac{2(z-1)}{(z-e^{-T})} - \frac{3}{2}.\frac{(z-1)}{(z-e^{-2T})}$$

Num.: $$\frac{7}{2}(z-e^{-T})(z-e^{-2T}) - 2(z-1)(z-e^{-2T}) - \frac{3}{2}(z-1)(z-e^{-T}) =$$

$$= z^2\left(\frac{7}{2} - 2 - \frac{3}{2}\right) + z\left(-\frac{7}{2}e^{-T} - \frac{7}{2}e^{-2T} + 2 + 2e^{-2T} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-T}\right)$$
$$+\frac{7}{2}e^{-3T} - 2e^{-2T} - \frac{3}{2}e^{-T}$$

$$D(z) = \frac{\left(\frac{7}{2} - 2e^{-T} - \frac{3}{2}e^{-2T}\right)z + \frac{7}{2}e^{-3T} - 2e^{-2T} - \frac{3}{2}e^{-T}}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

5. Representação de Sistemas Discretos no Espaço de Estados

5.1. Revisão de Equações a Diferenças

a) Equações a Diferenças no Formato Atrasado:

$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n)$

$y(-1)$, $y(-2)$, …, $y(-n)$ são dados ($n > 0$)

Solução em forma aberta:

EXEMPLO #16A: $y(k) = ay(k-1) + bu(k)$; $y(-1) = \alpha$; $u(k)$ degrau unitário.

$$y(0) = ay(-1) + bu(0) = a\alpha + b$$
$$y(1) = ay(0) + bu(1) = a^2\alpha + ab + b$$
$$y(2) = ay(1) + bu(2) = a^3\alpha + a^2 b + ab + b$$
$$\vdots$$
$$y(n) = ay(n-1) + bu(n) = a^{n+1}\alpha + \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) b = a^{n+1}\alpha + \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} b$$

$$y(n) = \left[\left(\alpha - \frac{b}{1-a} \right) a^{n+1} + \frac{b}{1-a} \right] u(n)$$

EXEMPLO #16B: Solução direta para o EXEMPLO #16A, usando a transformada Z:

$$Y(z) = a(z^{-1}Y(z) + y(-1)) + bU(z)$$

$$\text{Obs.: } \sum_{k=0}^{\infty} y(k-1)z^{-k} = z^{-1} \sum_{l=-1}^{\infty} y(l)z^{-l} \ (l = k-1)$$

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + a\alpha + \frac{b}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{a\alpha}{1-az^{-1}} + \frac{b}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{a\alpha}{1-az^{-1}} + \frac{\frac{-ab}{1-a}}{1-az^{-1}} + \frac{\frac{b}{1-a}}{1-z^{-1}}$$

$$y(n) = \left(a\alpha a^n - \frac{ab}{1-a} a^n + \frac{b}{1-a} \right) u(n)$$

b) Equações a Diferenças no Formato Adiantado:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \ldots + b_n u(k)$$

Condições iniciais são dadas: $y(n-1)$, $y(n-2)$, ..., $y(0)$ $(n > 0)$

EXEMPLO #16C: $y(k+1) = ay(k) + bu(k+1)$

$u(k)$ degrau unitário; $y(0) = a\alpha + b$ (condição inicial $\leftrightarrow$ $y(-1) = \alpha$)

Passando pela solução em forma aberta:

$$y(1) = ay(0) + bu(1) = a^2\alpha + ab + b$$

$$\vdots$$

$$y(n) = \left[\left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right) a^{n+1} + \frac{b}{1-a}\right] u(n) \text{ (conforme o EXEMPLO \#16A).}$$

EXEMPLO #16D: Solução direta para o EXEMPLO #16C, usando a transformada Z:

$$z(Y(z) - y(0)) = aY(z) + \underbrace{\frac{bz}{z-1}}$$

$$\mathcal{Z}[u(k)] = \mathcal{Z}[u(k+1)] = \frac{z}{z-1}$$

$$(z-a)Y(z) = (a\alpha + b)z + \frac{bz}{z-1}$$

$$Y(z) = (a\alpha + b)\frac{z}{z-a} + \frac{bz}{(z-a)(z-1)}$$

$$Y(z) = (a\alpha + b)\frac{z}{z-a} + \frac{\frac{-b}{1-a}z}{z-a} + \frac{\frac{b}{1-a}z}{z-1}$$

$$y(n) = \left[\underbrace{\left(a\alpha + b - \frac{b}{1-a}\right)}_{a\left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right)} a^n + \frac{b}{1-a}\right] u(n)$$

Formato "com avanços" – espaço de estados, controle digital

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Formato "com atrasos" – filtros digitais, processamento de sinais

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

Dadas equações a diferenças e *condições iniciais* (como na Seção 5.1), obter representação:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + Ju(k)$$

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

EXEMPLO #17: $\begin{cases} y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = u(k) \\ y(0) = \alpha \qquad y(1) = \beta \qquad y(2) = \gamma \end{cases}$

$$y(k+3) - 3\underbrace{y(k+2)}_{x_1} + 3\underbrace{y(k+1)}_{x_2} - \underbrace{y(k)}_{x_3} = u(k)$$

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \\ x_1(k+1) &= u(k) + 3x_1(k) - 3x_2(k) + x_3(k) \end{aligned}$$

$$
\text{Logo:} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\[2ex] y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\[2ex] \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \end{cases}
$$

5.2.1. Forma Canônica Controlável

$$y(k+3)+a_1y(k+2)+a_2y(k+1)+a_3y(k)=b_0u(k+3)+b_1u(k+2)+b_2u(k+1)+b_3u(k)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^3+b_1z^2+b_2z+b_3}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}=\frac{E(z)}{U(z)}\cdot\frac{Y(z)}{E(z)}$$

$$\frac{E(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}$$

$$e(k+3)+a_1\underbrace{e(k+2)}_{x_1(k)}+a_2\underbrace{e(k+1)}_{x_2(k)}+a_3\underbrace{e(k)}_{x_3(k)}=u(k)$$

$$\mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u(k)}$$

$$Y(z) = \frac{b_0\left(z^3 + \dfrac{b_1}{b_0}z^2 + \dfrac{b_2}{b_0}z + \dfrac{b_3}{b_0}\right)}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}.U(z)$$

$$Y(z) = b_0 U(z) + \left[(b_1 - b_0 a_1)z^2 + (b_2 - b_0 a_2)z + (b_3 - b_0 a_3)\right] \frac{U(z)}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

$$y(k) = (b_1 - b_0 a_1)e(k+2) + (b_2 - b_0 a_2)e(k+1) + (b_3 - b_0 a_3)e(k) + b_0 u(k)$$

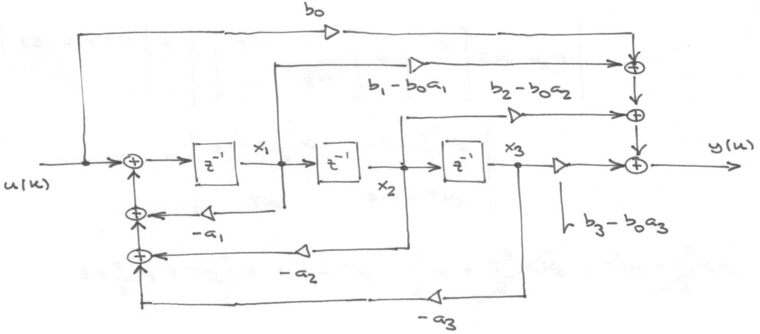
$$\boxed{y(k) = \left[\begin{array}{ccc} b_1 - b_0 a_1 & b_2 - b_0 a_2 & b_3 - b_0 a_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{array}\right] + b_0 u(k)}$$

Para ordens mais elevadas:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{CC}} = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 & b_2 - b_0 a_2 & \cdots & b_n - b_0 a_n \end{bmatrix} \qquad J_{\mathrm{CC}} = b_0$$

Diagrama de blocos:



Para cada um dos assuntos a seguir, usamos os mesmos métodos que foram usados para os sistemas em tempo contínuo:

1. Para o cálculo de função de transferência ($Y(z)/U(z)$) e solução ($y(k)$) das equações de estado em tempo discreto, usar os resultados da Seção 4.6.1.

2. Controlabilidade: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} \end{bmatrix}$

   Observabilidade: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H\Phi} \end{bmatrix}$

   Transformações lineares $\mathbf{T}$ para FCC, FCO, FCM, etc.

   FCM – formas modais com matriz $\mathbf{\Phi}$ diagonal

3. $\alpha_\mathrm{c}(z) \longrightarrow$ projeto de $\mathbf{K}$: $|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma K}| = \alpha_\mathrm{c}(z)$

   $\alpha_\mathrm{e}(z) \longrightarrow \mathbf{L}$

4. Posicionamento dos zeros em malha fechada

EXEMPLO #18: $$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \\ \text{Pólos desejados: } z_1 \text{ e } z_2 = -0.6 \pm 0.2j \end{cases}$$

$$\alpha_C = (z + 0.6 + 0.2j)(z + 0.6 - 0.2j) = z^2 + 1.2z + 0.4$$

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}| = \left| \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} z - 1 + \dfrac{T^2}{2} k_1 & -T + \dfrac{T^2}{2} k_2 \\ T k_1 & z - 1 + T k_2 \end{vmatrix}$$

$$z^2 + \left(-2 + \frac{T^2}{2} k_1 + T k_2\right) z + 1 - T k_2 - \frac{T^2}{2} k_1 + \frac{T^3}{2} k_1 k_2 + T^2 k_1 - \frac{T^3}{2} k_1 k_2$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 + \dfrac{T^2}{2} k_1 + T k_2 = 1.2 \\[2em] \dfrac{T^2}{2} - T k_2 + 1 = 0.4 \end{array}\right. \qquad \longrightarrow \qquad 2 T k_2 = 3.8$$

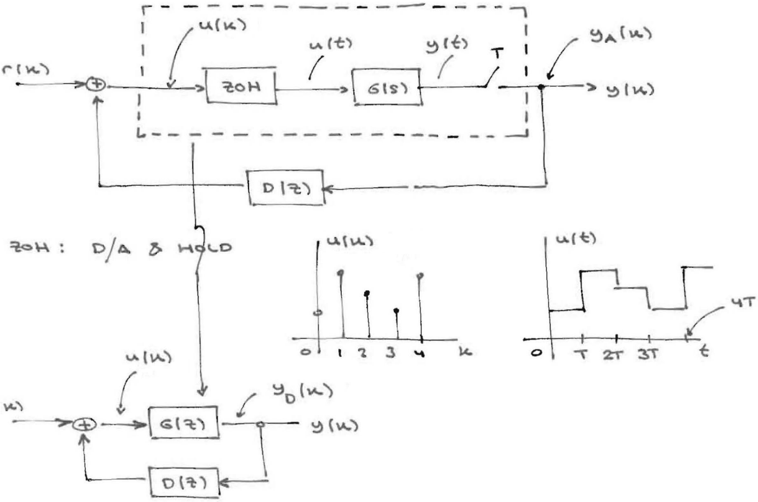
Então: $k_2 = \dfrac{1.9}{T}$ e $T^2 k_1 = 2.6 \rightarrow k_1 = \dfrac{2.6}{T^2}$.

Considerando $T = 0.1$, temos $\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc} 260 & 19 \end{array}\right]$.

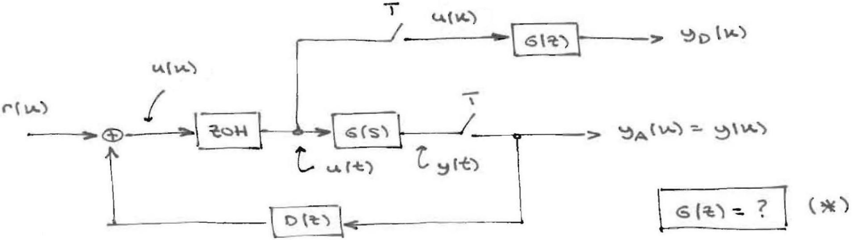
Ver no website – Lista de Exercícios #8 e Projeto #2

Parte II – Introdução ao Controle em Tempo Discreto

6. Projeto Exato


u(k)
u(t)
y(t)
T
y_A(k)
r(k)
ZOH
G(s)
y(k)
D(z)
ZOH : D/A & HOLD
u(k)
0 1 2 3 4 k
u(t)
4T
0 T 2T 3T t
u(k)
y_D(k)
k)
G(z)
y(k)
D(z)

$G(z)$ EQUIVALENTE A $G(S)$ $\Longleftrightarrow$ $y_D(k) = y_A(k)$

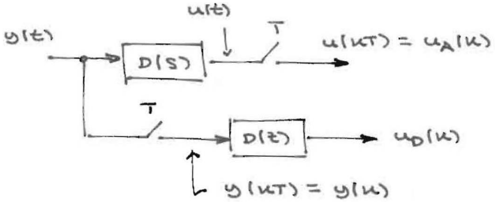


(*) DUAS SOLUÇÕES: 1. EQUIVALÊNCIA NA RESPOSTA AO DEGRAU

2. DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

<u>$G(z)$ NÃO É UMA APROXIMAÇÃO</u>: PARA A PLANTA, A REPRESENTAÇÃO $G(z)$ É EXATA, PORQUE $u(t)$ É CONSTANTE POR PARTES.

1A) Equivalência na resposta ao degrau, para o compensador:



- y(t) DEGRAU (NÃO É):

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{D(s)}{s}\right]$$

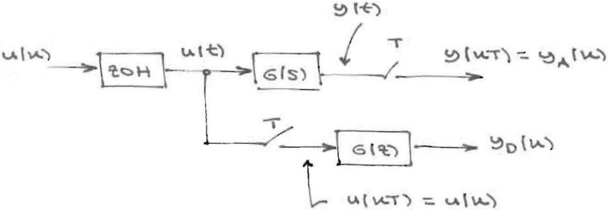
- $u_A(k) = u(kT)$
- $U_A(z) = \mathcal{Z}[u_A(k)]$
- y(k) DEGRAU:

$$U_D(z) = \frac{D(z)}{1 - z^{-1}}$$

- $u_A(k) \simeq u_D(k)$

$$D(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) U_A(z)$$

1B) Equivalência na resposta ao degrau, para a planta:



· u(t) DEGRAU:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

· $y_A(k) = y(kT)$

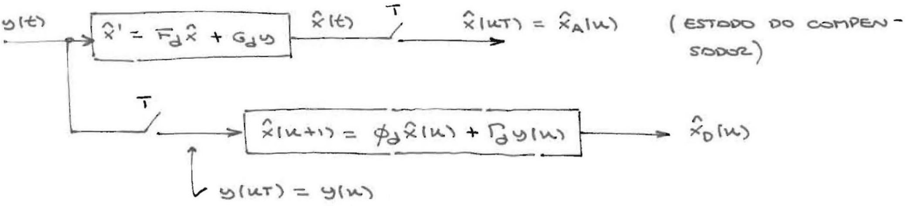
· $Y_A(z) = \mathcal{Z}\left[y_A(k)\right]$

· u(k) DEGRAU:

$$Y_D(z) = \frac{G(z)}{1 - z^{-1}}$$

PARA QUE $y_A(k) = y_D(k)$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Y_A(z)}$

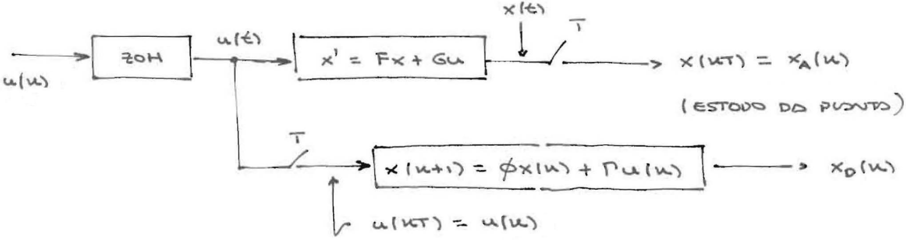
2A) Discretização no espaço de estados, para o compensador:



- $y(t)$ CONSTANTE POR PARTES (NÃO É). PARA QUE $\hat{x}_A(k) \simeq \hat{x}_D(k)$:

$$\phi_d = e^{F_d T} \quad ; \quad \Gamma_d = \int_0^T e^{F_d \tau} G_d \, d\tau$$

2B) Discretização no espaço de estados, para a planta:



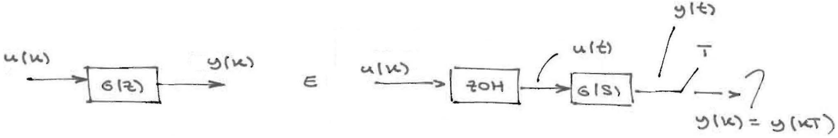
· u(t) CONSTANTE POR PARTES (ok). PARA QUE $x_a(k) = x_D(k)$:

$$\boxed{\phi = e^{FT} \quad ; \quad \Gamma = \int_0^T e^{F\sigma} G \, d\sigma}$$

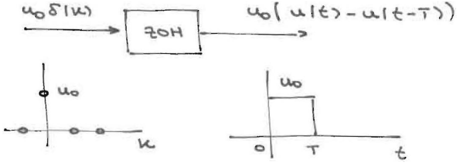
Enquanto que (1A) e (2A) são aproximações ($D(z)$) para $D(s)$, os resultados dos itens (1B) e (2B) são descrições *exatas* ($G(z)$) para a planta $G(s)$ precedida por um ZOH e seguida por uma chave. O compensador $D(s)$ não é precedido por um conversor D/A (ZOH).

Obs.: detalhes sobre o ZOH (*zero-order hold*):

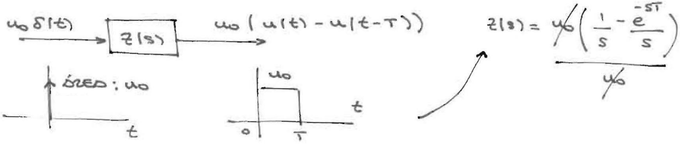
São equivalentes:



Considere:



Considere também o bloco "pulso retangular" $Z(s)$:



$$\text{Considere ainda: } \begin{cases} u(k) = (u(0), u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots) \\ u^*(t) = u(0)\delta(t) + u(1)\delta(t-T) + \ldots + u(k)\delta(t-kT) + \ldots \end{cases}$$

Então:

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) e^{-sT} = U(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

$$\boxed{U(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) U(z)\Big|_{z=e^{sT}}}$$

EXEMPLO #19: $G(s) = \dfrac{k}{s^2 + 2s + k}$; $k = 4\pi^2 + 1$ (note que $\omega_n = \sqrt{k} \simeq 2\pi + 0.08$)

Calcular $G(z)$, pelo método da equivalência na resposta ao degrau

---

$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{4\pi^2 + 1}{s(s + 1 + j2\pi)(s + 1 - j2\pi)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\dfrac{-2\pi - j}{4\pi}}{s + 1 + j2\pi} + \frac{\dfrac{-2\pi + j}{4\pi}}{s + 1 - j2\pi}$$

$$\text{Sejam: } \begin{cases} B = \dfrac{-2\pi - j}{4\pi} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{-j}{4\pi} \\ \\ a = 1 + j2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(Be^{-a^* T}\right) &= \mathrm{Re}\left[\left(\frac{-1}{2} + \frac{-j}{4\pi}\right)\left(\cos\left(2\pi T\right) + j\sin\left(2\pi T\right)\right)e^{-T}\right] \\ &= \frac{-e^{-T}}{2}\left(\cos\left(2\pi T\right) - \frac{\sin\left(2\pi T\right)}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

$$y(t) = \left(1 + Be^{-aT} + B^* e^{-a^* T}\right) u(t)$$

$$y(kT) = \left(1 + Be^{-aTk} + B^* e^{-a^*Tk}\right) u(kT) = y_{\mathrm{A}}(k)$$

$$Y_{\mathrm{A}}(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Bz}{z - e^{-aT}} + \frac{B^* z}{z - e^{-a^*T}}$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Y_{\mathrm{A}}(z) = 1 + (z-1) \underbrace{\left[\frac{B}{z - e^{-aT}} + \frac{B^*}{z - e^{-a^*T}}\right]}_{\boxed{A}}$$

$$\boxed{A} = \frac{Bz - Be^{-a^*T} + B^*z - B^*e^{-aT}}{z^2 - (e^{-aT} + e^{-a^*T})z + e^{-aT}e^{-a^*T}}$$

$$\boxed{A} = \frac{2\mathrm{Re}(B)z - 2\mathrm{Re}(Be^{-a^*T})}{z^2 - [2\mathrm{Re}(e^{-aT})]z + e^{-2\mathrm{Re}(a)T}}$$

Note que: $\quad \mathrm{Re}(B) = -1/2; \quad \mathrm{Re}(e^{-aT}) = e^{-T}\cos(2\pi T); \quad \mathrm{Re}(a) = 1$

$$G(z) = 1 - \frac{(z-1)\left[z - e^{-T}\left(\cos(2\pi T) - \dfrac{\sin(2\pi T)}{2\pi}\right)\right]}{z^2 - \left[2e^{-T}\cos(2\pi T)\right]z + e^{-2T}}$$

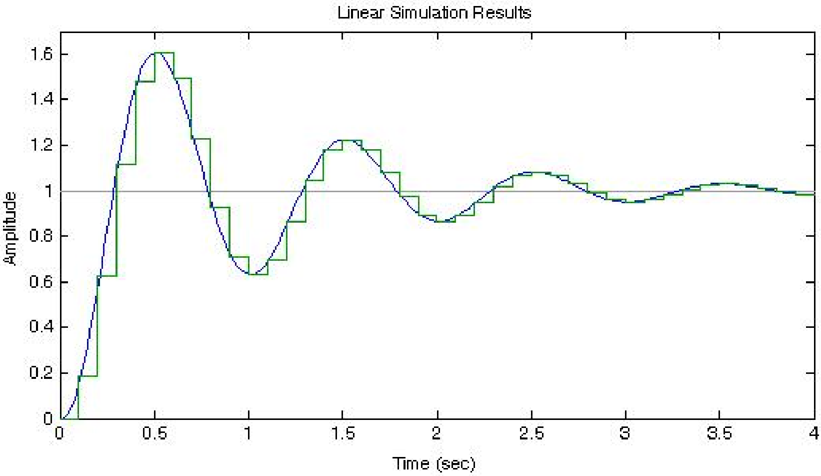
$$G(z) = \frac{\left[1 - e^{-T}\left(\cos(2\pi T) + \dfrac{\sin(2\pi T)}{2\pi}\right)\right]z + e^{-2T} - e^{-T}\left(\cos(2\pi T) - \dfrac{\sin(2\pi T)}{2\pi}\right)}{z^2 - \left[2e^{-T}\cos(2\pi T)\right]z + e^{-2T}}$$

Se $T = 0.1$:

$$G(z) = \frac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 1.4641z + 0.8187} = \frac{0.1833(z + 0.9347)}{z^2 - 1.4641z + 0.8187}$$

No MATLAB:

```
>> clear all;

>> % Simulacao da Planta Continua
>> a = 0; b = 15; pts = 1000; stp = (b-a)/pts; t = a:stp:(b-stp); u = stepfun(t,5);
>> k = 1 + 4*pi^2; num = k; den = [1 2 k]; sys = tf(num,den);
>> lsim(sys,u,t-5);

>> % Simulacao da Planta Discretizada (Calculo pelo MATLAB usando c2d.m)
>> a = 0; b = 15; stp = 0.1; t = a:stp:(b-stp); u = stepfun(t,5);
>> sysd = c2d(sys,0.1,'zoh');
>> hold on; lsim(sysd,u,t-5);

>> % Simulacao da Planta Discretizada (Calculo Manual do EXEMPLO # 19)
>> sysd2 = tf([0.1833 0.1713],[1 -1.4641 0.8187],0.1);
>> hold on; lsim(sysd2,u,t-5);
>> axis([0 4 0 1.7]);
```


Linear Simulation Results
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

EXEMPLO #20: Cancelamentos entre pólos e zeros de $G(z)$ do EXEMPLO #19.

Note que $\omega_n = \sqrt{4\pi^2 + 1} = 2\pi f_n$ $\qquad \left(G(s) = \dfrac{4\pi^2 + 1}{s^2 + 2s + (4\pi^2 + 1)} \right)$

$f_n \simeq 1$ Hz $\longrightarrow$ frequência de amostragem $f_s \simeq 2$ Hz ($T = 0.5$ seg).

$$G(z) = \frac{az + b}{z^2 + cz + d}, \text{ com } \begin{cases} a = 1 - e^{-T} \left(\cos(2\pi T) + \dfrac{\sin(2\pi T)}{2\pi} \right) \\ b = e^{-2T} - e^{-T} \left(\cos(2\pi T) - \dfrac{\sin(2\pi T)}{2\pi} \right) \\ c = -2e^{-T} \cos(2\pi T) \\ d = e^{-2T} \end{cases}$$

$$T = 0.1 \longrightarrow G(z) = \frac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 1.4641z + 0.8187} \text{ (pólos: } 0.73 \pm 0.53j)$$

Experimente $T = 0.5$ seg, $T = 1.0$ seg e $T = 2.0$ seg.

$T = 0.5$ seg:

$$G(z) = \frac{(1+e^{-0.5})z + e^{-1} + e^{-0.5}}{z^2 + 2e^{-0.5}z + e^{-1}} = \frac{(1+e^{-0.5})(z+e^{-0.5})}{(z+e^{-0.5})(z+e^{-0.5})} = \frac{1+e^{-0.5}}{z+e^{-0.5}}$$

Pólo: $z = -0.61$

$T = 1.0$ seg:

$$G(z) = \frac{(1-e^{-1})z + e^{-2} - e^{-1}}{z^2 - 2e^{-1}z + e^{-2}} = \frac{(1-e^{-1})(z-e^{-1})}{(z-e^{-1})(z-e^{-1})} = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

Pólo: $z = 0.37$

$T = 2.0$ seg:

$$G(z) = \frac{(1-e^{-2})z + e^{-4} - e^{-2}}{z^2 - 2e^{-2}z + e^{-4}} = \frac{(1-e^{-2})(z-e^{-2})}{(z-e^{-2})(z-e^{-2})} = \frac{1-e^{-2}}{z-e^{-2}}$$

Pólo: $z = 0.14$

EXEMPLO #21: $G(s) = \dfrac{k}{s^2 + 2s + k}$; $k = 4\pi^2 + 1$

Discretização no espaço de estados: calcular $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$.

$$G(s) = \frac{\dfrac{j(4\pi^2+1)}{4\pi}}{s+1+j2\pi} + \frac{\dfrac{-j(4\pi^2+1)}{4\pi}}{s+1-j2\pi}$$

Sejam: $A = \dfrac{j(4\pi^2+1)}{4\pi}$ e $p = -1 - j2\pi \longrightarrow G(s) = \dfrac{A}{s-p} + \dfrac{A^*}{s-p^*}$

$$\mathbf{F}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} A \\ A^* \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{F}_{\text{cm}}T} = \begin{bmatrix} e^{pT} & 0 \\ 0 & e^{p^*T} \end{bmatrix} = e^{-T} \begin{bmatrix} e^{-j2\pi T} & 0 \\ 0 & e^{j2\pi T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^T e^{\mathbf{F}_{\text{cm}}\tau} G_{\text{cm}} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{p\tau} & 0 \\ 0 & e^{p^*\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A^* \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} Ae^{p\tau} \\ A^*e^{p^*\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{A}{p} e^{pt}\right|_0^T \\ \\ \left.\dfrac{A^*}{p^*} e^{p^* t}\right|_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\pi + j}{4\pi}(1 - e^{pT}) \\ \dfrac{2\pi - j}{4\pi}(1 - e^{p^* T}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1 - e^{pT}) \\ \alpha^*(1 - e^{p^* T}) \end{bmatrix}$$

Obs.: controlabilidade, $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Phi\Gamma} \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \alpha(1 - e^{pT}) & \alpha e^{pT}(1 - e^{pT}) \\ \alpha^*(1 - e^{p^* T}) & \alpha^* e^{p^* T}(1 - e^{p^* T}) \end{bmatrix}$$

$$|\mathcal{C}| = \alpha\alpha^* e^{p^* T}(1 - e^{p^* T})(1 - e^{pT}) - \alpha\alpha^* e^{pT}(1 - e^{p^* T})(1 - e^{pT})$$

$$|\mathcal{C}| = 0 \longleftrightarrow e^{p^* T} = e^{pT}$$

Então $e^{(-1-j2\pi)T} = e^{(-1+j2\pi)T}$:

$$\cos(2\pi T) - j\sin(2\pi T) = \cos(2\pi T) + j\sin(2\pi T)$$

$$\sin(2\pi T) = 0 \longrightarrow T = \frac{1}{2},\ T = 1,\ T = \frac{3}{2},\ T = 2, \text{ etc.}$$

(compare com o EXEMPLO #20)

EXEMPLO #22: substituindo $T = 0.1$ em $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$ do EXEMPLO #21:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.7320 - 0.5319j & 0 \\ 0 & 0.7320 + 0.5319j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.0917 + 0.2872j \\ 0.0917 - 0.2872j \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} = \frac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 1.4641z + 0.8187}$$

```
>> [num,den] = ss2tf(phi,gamma,[1 1],0);
```

6.2. Projeto do Controlador no Espaço de Estados ($\mathbf{K}$)

Planta: $\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$

Realimentação de estados: $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$

Malha fechada: $\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$

Queremos: $\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}\right) = \alpha_c(z)$

Pelo método dos pólos dominantes:

$$\boxed{s_1, s_2, \ldots, s_n \longrightarrow z_1 = e^{s_1 T},\ z_2 = e^{s_2 T},\ \ldots,\ z_n = e^{s_n T}}$$

Este é análogo ao problema em tempo contínuo.

Soluções: $\begin{cases} \text{1. Cálculo direto de } \mathbf{K} \\ \text{2. Transformação direta para a forma canônica controlável} \\ \text{3. Fórmula de Ackermann} \end{cases}$

Aplicação da entrada de referência: $\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\bar{N}r(k) \\ y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$

EXEMPLO #23: $G(z) = \dfrac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 1.4641z + 0.8187}$

Encontre $\mathbf{K}_{CC}$ para colocar pólos em $z = 0.1$ e $z = 0.2 \longrightarrow \alpha_c(z) = z^2 - 0.3z + 0.02$.

Solução: $\mathbf{K}_{CC} = \begin{bmatrix} 1.1641 & -0.7987 \end{bmatrix}$

Usando $u = -\mathbf{K}_{CC}\mathbf{x} + r$ ($\bar{N} = 1$), temos em malha fechada:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.1833 & 0.1713 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 0.3z + 0.02} \longrightarrow \lim_{z \to 1} \frac{Y(z)}{R(z)} = 0.4925 \longrightarrow \bar{N} = 2.030$$

EXEMPLO #24: $G(z) = \dfrac{0.1833z + 0.1713}{z^2 - 1.4641z + 0.8187}$

Usando FCC, colocar ambos os pólos em $z = 0 \longrightarrow \alpha_c(z) = z^2$ $\left(\text{note: } \lim_{s \to -\infty} e^{sT} = 0\right)$

Solução: $\mathbf{K}_{\text{CC}} = \begin{bmatrix} 1.4641 & -0.8187 \end{bmatrix}$

Em malha fechada (com $u = -\mathbf{K}_{\text{CC}}\mathbf{x} + r$):

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.1833 & 0.1713 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.1833z + 0.1713}{z^2} \longrightarrow \lim_{z \to 1} \frac{Y(z)}{R(z)} = 0.3546 \longrightarrow \bar{N} = 2.8201$$

Usando $\bar{N} = 2.8201$: $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0.5169z + 0.4831}{z^2}$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = 0.5169z^{-1} + 0.4831z^{-2}$$

$$y(k) = 0.5169r(k-1) + 0.4831r(k-2);\ y(-1) = 0;\ y(-2) = 0$$

$$y(0) = 0.5169r(-1) + 0.4831r(-2) = 0$$

$$y(1) = 0.5169r(0) + 0.4831r(-1) = 0.5169$$

$$y(2) = 0.5169r(1) + 0.4831r(0) = 1.0000$$

Novidade:

Controlador *dead-beat*: $\alpha_c(z) = z^n$

Resposta ao degrau com erro igual a zero em no máximo n amostras (em tempo finito).

A saída alcança a entrada de referência (degrau unitário) em n amostras.

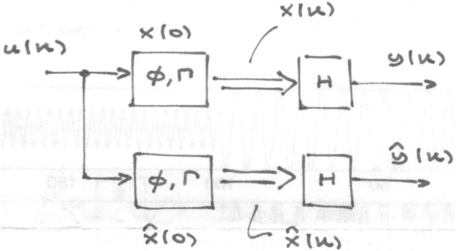
Temos $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})^n = \mathbf{0}$.

6.2. Projeto de Estimadores de Estados (L)

- Estimador de Predição
- Estimador Atualizado
- Estimador de Ordem Reduzida

6.2.1. Estimador de Predição

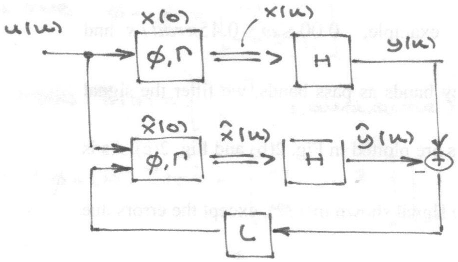
É o que vimos antes. Em malha aberta:



$$\begin{array}{ll} & \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ - & \\ & \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ \hline & \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{x}}(k) \end{array}$$

$\mathbf{\Phi}$: sistema estável $\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(k) = 0$ (convergência lenta)

Em malha fechada (estimador de predição):



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

$-$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\left(y(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(k)\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{H}\right)\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) \longrightarrow$ Estimativa do estado em instante de tempo referente a $k+1$.

$y(k) \longrightarrow$ Medida obtida do sensor em instante de tempo referente a k.

- Pólos desejados para o estimador de ordem completa: $\alpha_e(z) = 0$

  Então: $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \underbrace{\mathbf{L}}_{}\mathbf{H}) = \alpha_e(z)$

  $\downarrow$

  Também representado por $\mathbf{L}_p$ (p: predição)

- Mesma definição de observabilidade: $\det \mathcal{O} \neq 0$

- Este problema é análogo ao que foi resolvido em tempo contínuo

- Soluções: $\begin{cases} \text{1. Cálculo direto de } \mathbf{L} \\ \text{2. Transformação linear para FCO} \\ \text{3. Fórmula de Ackermann} \end{cases}$

- No MATLAB: `L = (acker(Phi',H',p))';`

EXEMPLO #25:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} ; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Pólos do erro de estimação: } z_1 = z_2 = 0 \ (\textit{dead-beat}) \longrightarrow \alpha_e(z) = z^2 \end{array} \right.$$

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{LH}| = \begin{vmatrix} z - 1 + l_1 & -2 \\ l_2 & z - 1 \end{vmatrix} = z^2 + (l_1 - 2)z + (-l_1 + 2l_2 + 1)$$

Então: $l_1 = 2$ e $l_2 = \dfrac{l_1 - 1}{2} = 0.5 \longrightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Note que $\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$ e considere $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (condição inicial qualquer)

$$\tilde{\mathbf{x}}(1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH})\,\tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(2) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH})\,\tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erro de estimação igual a zero em $n = 2$ amostras.

Implementação do estimador de predição:

$\uparrow$

Espera ΔT

$\downarrow$

$\boxed{k-1}$

Enviar $u(k-1)$ para o conversor D/A

Ler $y(k-1)$ do conversor A/D

Disponíveis: $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$, $u(k-1)$, $y(k-1)$

$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1) + \mathbf{L}y(k-1)}$

$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$

$\uparrow$

Espera $\Delta T = T - T_1$, onde

T_1 é o tempo de execução das instruções do loop

$\downarrow$

$\boxed{k}$

Enviar $u(k)$ para o conversor D/A $\longleftarrow$

Ler $y(k)$ do conversor A/D

Disponíveis: $\hat{\mathbf{x}}(k)$, $u(k)$, $y(k)$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}y(k)$

$u(k+1) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ $\longleftarrow$

$\uparrow$

Espera ΔT

$\downarrow$

EXEMPLO #26: $\hat{x}_1 = 0;\ \hat{x}_2 = 0;\ u = 0;$

$$\text{Loop:}\ \left[\begin{array}{l} \text{Aplicar u; ler y;} \\ \hat{x}_{1\mathrm{P}} = -\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 2u + 2y \\ \hat{x}_{2\mathrm{P}} = -0.5\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2u + 0.5y \\ \hat{x}_1 = \hat{x}_{1\mathrm{P}};\ \hat{x}_2 = \hat{x}_{2\mathrm{P}} \\ u = -k_1\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_2; \end{array}\right.$$

Problema do estimador de predição: "desperdício de tempo" ΔT.

6.2.2. Estimador Atualizado

O estimador atualizado usa, no tempo k, a amostra $y(k)$ para atualizar a estimativa de $\mathbf{x}(k)$.

$$\begin{array}{llll} \text{No est. de predição:} & \hat{\mathbf{x}}(k) = & \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1) & +\mathbf{L} \\ \text{No est. atualizado:} & \bar{\mathbf{x}}(k) = & \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1) & \text{(Eq. (1))} \\ & \hat{\mathbf{x}}(k) = & \bar{\mathbf{x}}(k) & +\mathbf{L}(y(k) - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}(k)) \quad \text{(Eq. (2))} \end{array}$$

Substituindo a Equação (1) na Equação (2), temos o estimador atualizado:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1) + \mathbf{L}\left(y(k) - \mathbf{H}\underbrace{\bar{\mathbf{x}}(k)}_{\downarrow \atop \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1)}\right)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi})\,\hat{\mathbf{x}}(k-1) + (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{LH\Gamma})\,u(k-1) + \mathbf{L}y(k)$$

Ou, no formato “avançado”:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi})\,\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{LH\Gamma})\,u(k) + \mathbf{L}y(k+1)} \qquad \text{(Eq. (3))}$$

Erro de estimação I: $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

$-$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) - \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\left(\underbrace{y(k+1)}_{\downarrow} - \mathbf{H}\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k)\right)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{H}\mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}u(k)$$

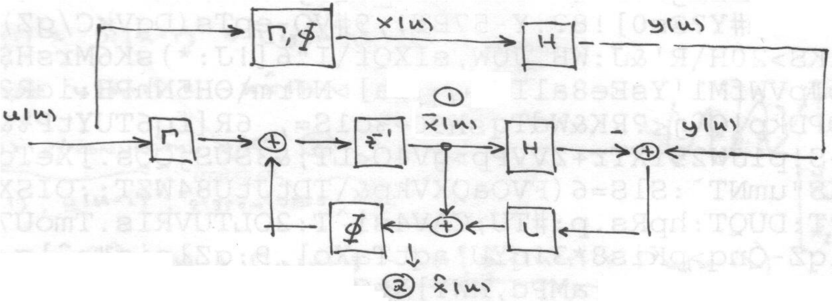
$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\right)$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{\Phi}\right)\tilde{\mathbf{x}}(k)} \qquad \text{(Equação (4))}$$

$|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{\Phi}| = \alpha_e(z)$ ou `L = (acker(Phi',(H*Phi)',p))';`

Para este vetor $\mathbf{L}$, utilizamos a representação $\mathbf{L}_a$ (atualizado).

Diagrama de blocos do estimador atualizado:



Note que $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ e $\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)$ têm os mesmos pólos.

Erro de estimação II: $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

$$-$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\underbrace{\hat{\mathbf{x}}(k)}_{\downarrow} + \mathbf{\Gamma}u(k) \text{ (da Equação 1)}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}\left(y(k) - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}(k)\right) \text{ (da Equação 2)}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{\Phi}\mathbf{L}\left(\underbrace{y(k)} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}(k)\right)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{\Phi}\mathbf{L}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}\mathbf{L}\mathbf{H})\,\tilde{\mathbf{x}}(k)} \qquad \text{(Equação (4))}$$

Então, obtemos a mesma solução $\mathbf{L}_a$ fazendo $|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}\mathbf{L}\mathbf{H}| = \alpha_e(z)$.

```
La = inv(Phi)*(acker(Phi',H',p))';
```

Note que $\boxed{\mathbf{L}_a = \Phi^{-1}\mathbf{L}_p}$

$$\textbf{EXEMPLO \#27:} \begin{cases} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} ; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Encontre } \mathbf{L}_a \text{ (estimador atualizado) para que } \alpha_e(z) = z^2 \end{cases}$$

$$\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & 2 - 2l_1 \\ -l_2 & 1 - 2l_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z - 1 + l_1 & -2 + 2l_1 \\ l_2 & z - 1 + 2l_2 \end{vmatrix} = z^2 + (l_1 + 2l_2 - 2)\, z + 1 - l_1 \longrightarrow l_1 = 1 \; ; \; l_2 = 0.5$$

$\mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. Note que $\mathbf{L}_a = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Implementação do estimador atualizado, sem "desperdício de tempo":

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \underbrace{(\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi})\,\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{LH\Gamma})\,u(k)}_{\breve{\mathbf{x}}(k+1)\ \text{(cálculo } parcial \text{ de } \hat{\mathbf{x}}(k+1))} + \mathbf{L}y(k+1)$$

$\uparrow$
Espera ΔT
$\downarrow$

$\boxed{k-1}$

Ler $y(k-1)$ do conversor A/D
Calcular $\hat{\mathbf{x}}(k-1) = \breve{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{L}y(k-1)$
Calcular $u(k-1) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k-1)$
Enviar $u(k-1)$ para o conversor D/A
Disponíveis: $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$, $u(k-1)$, $y(k-1)$
Cálculo parcial: $\breve{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1) - \mathbf{LH}\left(\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{\Gamma}u(k-1)\right)$

$\uparrow$
Espera $\Delta T = T - T_2$, onde
T_2 é o tempo de execução das instruções do loop
$\downarrow$

$\boxed{k}$

Ler $y(k)$ do conversor A/D $\longleftarrow$
Calcular $\hat{\mathbf{x}}(k) = \breve{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}y(k)$
Calcular $u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$
Enviar $u(k)$ para o conversor D/A
Disponíveis: $\hat{\mathbf{x}}(k)$, $u(k-1)$, $y(k)$
Cálculo parcial: $\breve{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi})\,\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{LH\Gamma})\,u(k)$ $\longleftarrow$

$\uparrow$
Espera ΔT ...
$\downarrow$

Obs.: $u(k)$ aplicado T_3 segundos após a obtenção da amostra $y(k)$. T_3 é um pequeno atraso, que pode ser modelado diretamente como um atraso na entrada da planta.

$$
\textbf{EXEMPLO \#28:}\ \left\{\begin{array}{l}
\text{Dados e } \mathbf{L}_a \text{ do EXEMPLO \#27.} \\[2ex]
\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{H}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{L}\mathbf{H}\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}
\end{array}\right.
$$

$\hat{x}_1 = 0$; $\hat{x}_2 = 0$; $u = 0$; $\longrightarrow \breve{x}_1 = 0$ e $\breve{x}_2 = 0$

$$
\text{Loop:}\ \left\{\begin{array}{l}
\text{Ler } y; \\[1ex]
\hat{x}_1 = \breve{x}_1 + y; \\[1ex]
\hat{x}_2 = \breve{x}_2 + 0.5y; \\[1ex]
u = -k_1\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_2 \\[1ex]
\text{Aplicar } u; \\[1ex]
\breve{x}_1 = 0;\ \breve{x}_2 = -0.5\hat{x}_1 + u;
\end{array}\right.
$$

6.2.3. Estimador de Estados de Ordem Reduzida

$$\begin{bmatrix} x_{\rm a}(k+1) \\ \mathbf{x}_{\rm b}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\rm aa} & \mathbf{\Phi}_{\rm ab} \\ \mathbf{\Phi}_{\rm ba} & \mathbf{\Phi}_{\rm bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\rm a}(k) \\ \mathbf{x}_{\rm b}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{\rm a} \\ \mathbf{\Gamma}_{\rm b} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\rm a}(k) \\ \mathbf{x}_{\rm b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\rm b}(k+1) = \boxed{\mathbf{\Phi}_{\rm bb}} \quad \boxed{\mathbf{x}_{\rm b}} + \underbrace{\boxed{\mathbf{\Phi}_{\rm ba} x_{\rm a}(k) + \mathbf{\Gamma}_{\rm b} u(k)}}_{\text{“Entrada } u(k) \text{ conhecida”}}$$

$$\underbrace{\boxed{x_{\rm a}(k+1) - \Phi_{\rm aa} x_{\rm a}(k) - \Gamma_{\rm a} u(k)}}_{\text{“Saída } y(k) \text{ conhecida”}} = \mathbf{\Phi}_{\rm ab} \mathbf{x}_{\rm b}(k)$$

Estimador de predição $\left(\text{para} \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \boxed{\mathbf{\Phi}} \quad \boxed{\mathbf{x}(k)} + \boxed{\mathbf{\Gamma} u(k)} \\ \boxed{y(k)} = \boxed{\mathbf{H}}\, \mathbf{x}(k) \end{cases} \right)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) + \mathbf{L}\left(y(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(k)\right)$$

Então:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_{\rm b}(k+1) = \mathbf{\Phi}_{\rm bb}\hat{\mathbf{x}}_{\rm b}(k) + \mathbf{\Phi}_{\rm ba} x_{\rm a}(k) + \mathbf{\Gamma}_{\rm b} u(k) + \mathbf{L}\left(x_{\rm a}(k+1) - \Phi_{\rm aa} x_{\rm a}(k) - \Gamma_a u(k) - \mathbf{\Phi}_{\rm ab}\hat{\mathbf{x}}_{\rm b}(k)\right)}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathbf{x}_{\mathrm{b}}(k+1) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{bb}}\mathbf{x}_{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{ba}}x_{\mathrm{a}}(k) + \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{b}}u(k) \\
- & \\
 & \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k+1) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{bb}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k) + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{ba}}x_{\mathrm{a}}(k) + \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{b}}u(k) + \mathbf{L}\left(x_{\mathrm{a}}(k+1) - \Phi_{\mathrm{aa}}x_{\mathrm{a}}(k) - \Gamma_{a}u(k) - \mathbf{\Phi}_{\mathrm{ab}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k)\right) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k+1) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{bb}}\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k) + \mathbf{L}\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{ab}}(\mathbf{x}_{\mathrm{b}}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k))\right) = \left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{bb}} - \mathbf{L}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{ab}}\right)\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k)
$$

Finalmente: $\left|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_{\mathrm{bb}} + \mathbf{L}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{ab}}\right| = \alpha_e(z)$

EXEMPLO #29: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Encontre } L \text{ para que } \alpha_e(z) = z\text{; mostre a implementação.} \end{array} \right.$

$\Phi_{\mathrm{bb}} - L\Phi_{\mathrm{ab}} = 1 - 2L \longrightarrow z - 1 + 2L = z \longrightarrow L = 0.5$

$$
\begin{array}{c}
\hat{x}_{\mathrm{b}}(k) = \Phi_{\mathrm{bb}}(k)\hat{x}_{\mathrm{b}}(k-1) + \Phi_{\mathrm{ba}}x_{\mathrm{a}}(k-1) + \Gamma_{\mathrm{b}}u(k-1) + \\
L\left(x_{\mathrm{a}}(k) - \Phi_{\mathrm{aa}}x_{\mathrm{a}}(k-1) - \Gamma_{\mathrm{a}}u(k-1) - \Phi_{\mathrm{ab}}\hat{x}_{\mathrm{b}}(k-1)\right)
\end{array}
$$

$\hat{x}_{\mathrm{b}}(k) = \hat{x}_{\mathrm{b}}(k-1) + 2u(k-1) + 0.5\left(y(k) - y(k-1) - 2u(k-1) - 2\hat{x}_{\mathrm{b}}(k-1)\right)$

$\hat{x}_{\mathrm{b}}(k) = u(k-1) - 0.5y(k-1) + 0.5y(k)$

$x_{\mathrm{a}} = y(k)$

Implementação:

$\boxed{k-1}$ $\breve{x}_{\text{b}}(k) = u(k-1) - 0.5y(k-1)$

ΔT

$\boxed{k}$ Ler $y(k)$ do conversor A/D
$\hat{x}_{\text{b}}(k) = \breve{x}_{\text{b}}(k) + 0.5y(k)$
Aplicar ao conversor D/A: $u(k) = -k_1 y(k) - k_2 \hat{x}_{\text{b}}(k)$
$\breve{x}_{\text{b}}(k+1) = u(k) - 0.5y(k)$

6.3. Compensadores (**K** e **L**)

Princípio da Separação: a equação característica do sistema completo (usando **K** e **L**) em malha fechada é:

$$\underbrace{|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma K}|}_{\alpha_c(z)}\,\underbrace{|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{LH}|}_{\alpha_e(z)} = 0$$

- Demonstração: idêntica à do princípio da separação em tempo contínuo; $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix}$

- $\alpha_e(z)$: erro do estimador de estados de ordem completa (predição ou atualizado) ou de ordem reduzida.

a) Estimador de Predição:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}y(k)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K} - \mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}y(k) \text{ note que } \mathbf{M} = \mathbf{0} \\ u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

$$\boxed{D(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = -\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma K} + \mathbf{LH})^{-1}\mathbf{L}}$$

b) Estimador Atualizado:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi})\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{LH\Gamma})u(k) + \mathbf{L}y(k+1)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LH\Phi} - \mathbf{\Gamma K} + \mathbf{LH\Gamma K})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}y(k+1) \text{ (assumindo } \mathbf{M} = \mathbf{0}) \\ u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}\hat{(k)} \end{cases}$$

$$\boxed{D(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = -\mathbf{K}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{LH\Phi} + \mathbf{\Gamma K} - \mathbf{LH\Gamma K}\right)^{-1}\mathbf{Lz}}$$

c) Estimador de Ordem Reduzida: implementação semelhante à do estimador atualizado, usando a equação que define $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k+1)$. A equação que define $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{b}}(k+1)$ e a equação que define $u(k)$ são usadas para o cálculo de $D(z)$. Como exemplo, ver a Questão #4 da Segunda Prova Parcial de 2006/2.

6.4. Aplicação da Entrada de Referência

- No caso em que $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, a função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 - D(z)G(z)}.$$

Calcular $\bar{N}$ usando Teorema do Valor do Final.

- Utilizando $\mathbf{M}$ qualquer: $\gamma(s) \longrightarrow$ zeros que podem ser alocados. O método é idêntico ao que foi aplicado em tempo contínuo.

6.5. Controle Integral

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{\Gamma}_1 w(k)$

Diferença entre a saída e a entrada de referência: $e(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) - r(k)$. Cria-se mais um estado:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + e(k)$$

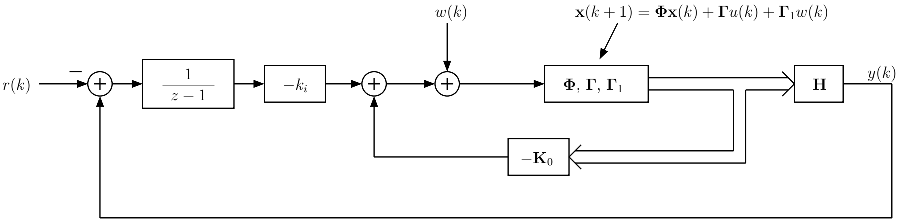
Equações de estado aumentadas:

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_i} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_i} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Gamma}_1 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix}$$

Nova regra de controle: $u = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_i & | & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$

Cálculo de $\mathbf{K}$: $|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Gamma}_i\mathbf{K}| = \alpha_c(z)$



$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{\Gamma} k_i & \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Gamma}_1 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix}$$

1. $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = -\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -\mathbf{H} \\ \mathbf{\Gamma} k_i & z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $\qquad \lim_{z\to 1} \dfrac{Y(z)}{R(z)} = 1$

2. $\dfrac{Y(z)}{W(z)} = -\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -\mathbf{H} \\ \mathbf{\Gamma} k_i & z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Gamma}_1 \end{bmatrix}$ $\qquad \lim_{z\to 1} \dfrac{Y(z)}{W(z)} = 0$