UFRJ / COPPE / Programa de Engenharia Elétrica
CPE-723 – Otimização Natural (Parte II - *Simulated Annealing*)
Lista de Exercícios #2

1. Considere um processo de Markov $X(t)$ que tem três estados possíveis: 0, 1, e 2. A evolução temporal deste processo é dada pela matriz de transição a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

   a) Considerando que a distribuição de probabilidade de $X(0)$ é dada pelo vetor $\mathbf{p}_0 = [0.3\ 0.4\ 0.3]^T$, calcule a distribuição de probabilidade de $X(3)$ (ou seja, do processo de Markov no instante $t = 3$).
   b) Iniciando em $X(0) = 1$, e usando um gerador de números aleatórios (são necessários apenas três números aleatórios equiprováveis), calcule manualmente uma amostra do processo $X(t)$ até $t = 3$.
   c) Usando um computador, execute 100 repetições do item (b). Em cada uma das 100 repetições, comece a simulação com um valor diferente de $X(0)$, assumindo que os eventos $X(0) = 0$, $X(0) = 1$, e $X(0) = 2$ são equiprováveis. Armazene as 100 cadeias obtidas em uma matriz $\mathbf{X}$, com 4 colunas ($t = 0$ até $t = 3$) e 100 linhas.
   d) Fazendo histogramas de cada uma das 4 colunas, calcule as distribuições de probabilidade do processo $X(t)$ em cada um dos 4 instantes: $t = 0, 1, 2, 3$. Comente os resultados obtidos.

2. Considere um sistema em que só há 5 estados possíveis: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$. Os custos $J(x)$ de cada um dos estados são indicados na tabela abaixo:

x	$J(x)$
1	0.5
2	0.2
3	0.3
4	0.1
5	0.4

   a) Considere um processo de Markov gerado pela aplicação do algoritmo de Metropolis aos dados da tabela acima, com temperatura fixa $T = 0.1$. Calcule a matriz de transição M que define o processo $X(t)$.
   Obs.: note que o estado $X(t)$ é unidimensional, e portanto a matriz M é 5×5.
   b) Iniciando em $X(0) = 1$, calcule manualmente 4 amostras do processo $X(t)$.
   c) Qual é o vetor invariante da matriz M do item (a) ?
   Obs.: para facilitar os cálculos, pode-se usar o computador neste item.
   d) Calcule os fatores de Boltzmann (ou seja, $e^{-(J(x))/T}$) associados aos dados da tabela acima, e compare-os com o resultado do item (c). Use $T = 0.1$.
   e) *Simulated Annealing:* Usando um computador, execute 1000 iterações do algoritmo de Metropolis em cada uma das 10 temperaturas a seguir. Na passagem de uma temperatura para a outra, use o estado atual. Comente as distribuições de probabilidade obtidas no final de cada temperatura.

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
0.1000	0.0631	0.0500	0.0431	0.0387	0.0356	0.0333	0.0315	0.0301	0.0289

3. Proponha uma função $J(\mathbf{x})$, sendo $\mathbf{x}$ um vetor com 10 dimensões, cujo ponto mínimo você conheça. Evite propor funções que tenham um só ponto mínimo. Encontre o ponto mínimo global utilizando S.A.
   Obs.: neste exercício, entregue o código utilizado e alguns comentários sobre o resultado obtido.